１． 2 つの曲線 $y = \exp(2x)$と $y = \ln(px) + qx$ が点$(1, e^2)$を通り，この点における曲線の接線が直交しているとき，q の値を求めよ。（H.9 労基）

２． 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = xy$ の解のうち，$(x, y) = (0, 2)$を通るものの，$x = 1$ のときの y の値を求めよ。（H.20 地方上級）

１． 点$(1, e^2)$を通っていることから，

$$e^2 = \ln p + q$$

曲線の傾きは，$y = \exp(2x)$が，$y' = 2\exp(2x)$なので，$2e^2$，$y = \ln(px) + qx$ が，$y' = \frac{1}{x} + q$ なので，$1 + q$ となるので，

直交条件から，

$$2e^2(1 + q) = -1$$

これより，

$$q = -1 - \frac{1}{2e^2}$$

２． 変数分離を行うと，

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

これを積分して，

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$A = e^C$ と置き直すと，これは次の形に書き直せる。

$$y = A\exp(\frac{1}{2}x^2)$$

これが(0，2)を通るので，$A = 2$ となる。ここで，$x = 1$ を代入すると，

$$y = 2\exp(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{e}$$

１． 接線の計算の問題です。接線は地方上級では出題がありますが，他はそれほど出題比率が高いとは言えません。ここでは微分の練習ということで出題しました。

２． 変数分離形の微分方程式の出題です。知る限り，地方上級では初めての出題で，国家 II 種でも H.14 以来出題がありません。ただ，専門では必要になることもあるでしょう。国家 I 種では最近，こうした微分方程式を解く問題も出題されています。