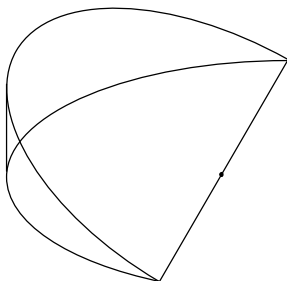


1. 曲線 $y = ax^n$ と x 軸, $x = 1$ とで囲まれる部分を x 軸を回転軸として回転させてできる回転体の体積を V_1 , y 軸を回転軸として回転させてできる回転体の体積を V_2 とする。

(1) $a = 3, n = 4$ のとき, $\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。

(2) a をある値に固定したところ, n をどのような値にしても $\frac{V_1}{V_2} = 1$ となる n の値は存在しなかった。 a の値を求めよ。

2. 図は, 半径 1 の円柱を縦に半分に割り, それをさらに底面と 30° の角度をなす平面で切断してできた立体である。この立体の体積, 側面積および表面積を求めよ。(体積に付き国家 II 種)



1. 文字のまま体積比を求めよう。

$$V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 a^2 x^{2n} dx = \frac{\pi a^2}{2n+1}$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 xy dx = 2\pi \int_0^1 ax^{n+1} dx = \frac{2\pi a}{n+2}$$

これより,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(n+2)}{2n+1}$$

(1) $a = 3, n = 4$ ならば, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(n+2)}{2n+1} = 2$

(2) $a = 2$ のとき, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$ となって, どうしても 1 にはならない。

2. (体積について)

図のように, 中心から半径の方に x 軸をとって, 切断した三角形の面積を考える。

これを $S(x)$ とすると,

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$$

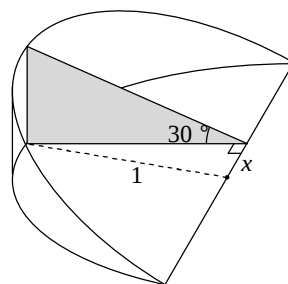
したがって, 求める体積は, 断面面積を積分して,

$$V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

次に側面積を求める。今度は, 図のように中心からの角度を θ として, できる長方形の高さ $h(\theta)$ を求めると,

$$h(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}}$$

したがって, 図の色のついた微小長方形の面積を積分すればよいが, 弧の長さが $r d\theta = d\theta$ になることに注意する。



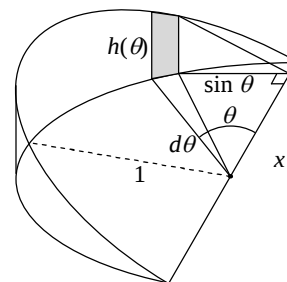
求める側面積 S_1 は,

$$S_1 = \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

次に, 底面積は円の半分で, π となり, 上面は, 短軸の半径が 1,

長軸の半径が $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の楕円の半分なので, 面積は $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

以上から, 表面積は, $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$



-
1. 回転体の体積の計算の問題です。(2)は変な形での出題でしたが, 要するに体積が計算できれば問題ありません。
 2. 断面積から体積を求める問題と, その発展です。珍しい出題なのですが, 国家 II 種で過去に出題がありました。側面積は難問ですので, 国家 I 種を目標にする人が一度経験として解いておけば, それで十分でしょう。