１．方程式 $2x^3-3x^2-12x+a=0$ が 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めなさい。

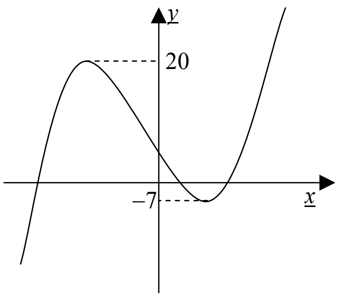
２．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に点 P(4，2)から 2 本の接線を引く。その 2 接点を通る直線の式を求めなさい。

１．$a=-2x^3+3x^2+12x=f(x)$とおいて，$y=f(x)$と $y=a$ の交点の数を問題にすることにする。そこで，$y=f(x)$のグラフを考えると，

$$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x-2)(x+1)$$

となるので，グラフは図のようになる。

これより，求める範囲は，$\underline{-7<a<20}$



２．接点を$(a,\ b)$とする。すると，この楕円の接線の式は次の形で表される。

$$\frac{ax}{4}+by=1$$

ところで，いま考えている接線は(4，2)を通るので，これを代入すると，

$$\frac{a}{2}+b=1$$

ここで，条件を満たす接点は 2 つあるが（P は楕円の外にあるので），どちらも上の関係式を満たす（そして，求める直線は明らかに 1 つしかないので）。ということは改めて接点を$(x,\ y)$とおくと，これらには，

$$\underline{\frac{x}{2}+y=1}$$

の関係式があり，これは直線の式なので，これが求める直線である。

１．H.19 国家 I 種や労基で出された問題を念頭に，方程式とグラフの関係の問題を出題しました。高校数学では典型的な問題ですが，公務員試験ではあまり例がありませんので，これで一度思い出しておくことが大切です。
２．解答のあまりのあっさりさに驚かれたかもしれませんが，図形の有名問題です。最近国家 I 種で楕円の出題が時々あるため，特に接線の公式を紹介するために出題しました。接点を正直に求めていくのでは，かなり計算量が増えますので，その場合には，解と係数の関係などを多用するのでしょう。接線の公式は微分を使って証明するのが普通ですが，そのほかにも証明方法はあります。覚えやすい公式ですので，余裕があれば頭の片隅に入れておくとよいでしょう。