１．行列 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする。

(1)　f によって $y=2x+1$ が移る直線の式を求めよ。

(2)　f によって $y=2x+1$ に移る直線の式を求めよ。

２．空間内に平面 $2x+y+z=0$ と，直線 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{a}$ がある。

　この平面と直線が垂直に交わるときの a の値はいくらか。また，このとき，半径 1 の球が平面と直線の両方に接しているとすると，この球の中心の存在する平面の式はどのようなものか。

１．(1)（A は逆行列を持つので，直線は必ず直線に移る）直線上の点(0，1)の移る先は(1，−3)，(−1，−1)の移る先は，(1，2)である。この 2 点を通る直線が求めるもので，その直線は，$\underline{x=1}$ である。

(2)　$A^{-1}=\dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ である。この逆変換によって，$y=2x+1$ が移る先を考えればよい。(0, 1)は $\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ にうつり，(−1，−1)は，$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ にうつる。この 2 点の通る直線の式は，$\underline{y=x-\dfrac{1}{5}}$

２．平面と直線が垂直に交わるとき，平面の法線ベクトル(2，1，1)と，直線の方向ベクトル(4，2，a)は平行になる。したがって，$a=2$ である。次の球であるが，要するに平面から距離 1 のところにある平面の式が求めるものである。この平面上の点を(p，q，r)とおくと，点と平面の距離の公式から，

$$1=\frac{|2p+q+r|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\qquad \therefore\quad 2p+q+r=\pm\sqrt{6}$$

　これが求める式で，文字を書き直すと，$\underline{2x+y+z=\pm\sqrt{6}}$ となる。

１．1 次変換の基本的問題です。1 次変換に慣れていない人が多いだろう，ということで出題しました。(2)の逆変換が思いつくようになると，1 次変換も大分慣れてきたもの，と言えるかと思います。

２．前半は，空間図形の基本的問題です。法線ベクトルと方向ベクトルは平行になることに注意です。後半ですが，これは点と平面の距離の公式の練習です。実は元々は平面と直線が 45°くらいで交わる場合を考えていました。直線に接する球の存在領域は，直線を軸とする円柱の側面になります。ですから，斜めに交わる場合，球の中心の存在領域は（2 つの）楕円になります。