

1. A, B 2 人がゲームの勝負をする。1 回のゲームでは, A の勝つ確率は $\frac{2}{3}$ である。そこで, このゲームを連続して行い, 先に 2 連勝した方が勝ちと決めたとする。このとき, A が勝つ確率はいくらか。

2. A, B, C の 3 人がゲームの勝負をする。このゲームは 2 人対戦専用であるため, 巴戦で勝負をすることにした。つまり, まず最初に A と B が勝負を行い, 勝った方が C と勝負をする。ここで, C が勝てば, A, B のうち, 負けた方, つまり, 前のゲームでは休んでいた方が勝った C と勝負をする。以下同様にして 最初に 2 連勝した人が勝ちと決める。ここで, A と B の実力は対等であり, 1 回のゲームで, どちらが勝つかは確率 $\frac{1}{2}$ であるが, C だけは実力が異なり, C が, 1 回のゲームで A に勝つ確率も, B に勝つ確率も, 等しく p であるとする。

(1) $p = \frac{1}{2}$ のとき, A が勝つ確率はいくらか。

(2) この巴戦で A, B, C いずれが勝つ確率も $\frac{1}{3}$ で対等となるときの p の値はいくらか。

1. A が勝って王手をかけた状態からはじめて, 最終的に A が勝つ確率を p とする。ここで, p の内訳を見てみよう。すると, A がいきなり勝って勝ちを決めるか, あるいは 1 度負けてさらに次に勝って, 再び元の状態に戻るかのいずれかであるので,

$$p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} p \qquad p = \frac{6}{7}$$

求める確率は, 最初に A が勝つか, あるいは最初に負けて, 次に A が勝つかいずれかなので,

$$\frac{2}{3} p + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} p = \frac{8}{9} p = \frac{16}{21}$$

2. この巴戦で一般に C が勝つ確率を求めてみよう。これを P とおく。 P の内訳を考えると, まず勝ち上がった A または B に勝つことは前提で, 次に連勝するか, そうでなければ, 次に C が負けて, 更に C が勝った方が次に負けて再び C に手順が回って最初に戻るかいずれかである。したがって,

$$P = p^2 + p(1-p) \times \frac{1}{2} \times P \qquad P = \frac{2p^2}{p^2 - p + 2}$$

(1) $p = \frac{1}{2}$ であるので, $P = \frac{2}{7}$ となる。これは C が勝つ確率なので, A が勝つ確率は $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$

(2) $P = \frac{1}{3}$ を解くと, $p = \frac{-1 + \sqrt{41}}{10} = 0.54$

今回はいずれも無限試行の確率の問題です。が, ちょっとひねっています(実はちょっと出題時に勘違いしていました。ですので, 次回にストレートなものを)。いずれももちろん無限等比級数を使った解法があります。というか, そちらが普通かもしれませんが, 確認してみてください。このタイプの問題は, 国家 I 種の工学の基礎では時々題材となりますが, 国家 I 種の教養で, 巴戦の確率が出題されたことがありますし, H.14 国家 II 種の工学の基礎での出題もあります。

1. 最初にどちらが勝ったのかで場合分けが必要となります。これは無限等比級数でも同じことです。それは最初の試合だけは特別な試合だからです。2 戦目以降は必ずどちらかがリーチをかけた状態になります。しかし 1 戦目だけはちがうのです。

2. 巴戦の確率は有名問題です。とはいえ, 無限試行の確率としては難しい部類に入ります。特に(1)は国家 I 種の教養で出題されているものです。