

1 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2xy + x$ が $y(0) = 0$ を満たすとき、 $y(1)$ の値を求めよ。

2 1辺の長さが1の正四面体を考える。正四面体の同じ面上にない2つの辺を考える。それぞれの辺の中点を結ぶ線分の長さを求めよ。

1 変数分離法を使う。

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + x = x(2y + 1)$$

となるので、

$$\frac{dy}{2y+1} = xdx$$

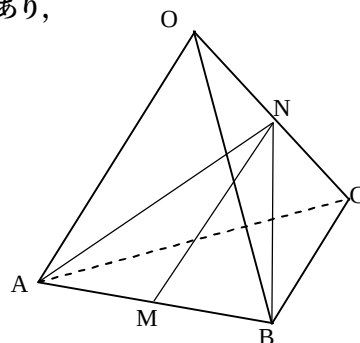
したがって、

$$\int_{y(0)}^{y(1)} \frac{dy}{2y+1} = \frac{1}{2} \log \frac{2y(1)+1}{2y(0)+1} = \frac{1}{2} \log(2y(1)+1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \quad \therefore \underline{y(1) = \frac{e-1}{2}}$$

2 (解1) 図のように文字をおく。このとき、 $\triangle ANB$ は二等辺三角形であり、 MN はその中線であるため、 MN と AB は垂直に交わる。ここで、

$AB = 1$, $NA = NB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるので、三平方の定理より、

$$MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(解2) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと、

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ である。ここで、 $\vec{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, $\vec{ON} = \frac{\vec{c}}{2}$ であるので、

$$|\vec{MN}|^2 = \frac{1}{4} |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|^2 \quad (\text{計算省略})$$

1は変数分離法で解く微分方程式の問題です。このような形式は、国家Ⅱ種ではH.14に出題がありましたが、地方上級でもH.20に出題がありました。最近では国家Ⅰ種でも、微分方程式を解かせる問題が出題されています。変数分離法はもっとも基本的な解法ですので、何回か練習しておきましょう。

2は空間図形の問題です。幾何で解く場合には、求める長さを含む平面(具体的には三角形)を考え、その長さを求めることが基本となります。これに対し、別解のベクトルによる解法は、慣れてしまえば、単なる計算問題となります。最近、国家Ⅱ種で空間幾何も平面ベクトルも出題がありますので、計算してみるとよいでしょう。