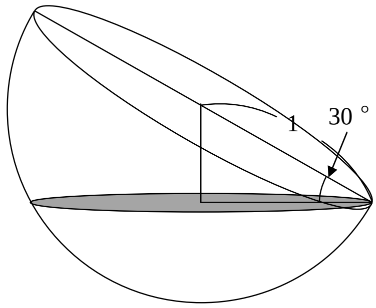
1　半球形のふたのない容器が水平に置かれ，中に水がいっぱいに入っている。 この容器を静かに 30°傾けたとき，容器内に残っている水の容積の，最初に入っていた水の容積に対する割合を求めよ。

2　立方体の各面の中心を頂点とする正八面体をつくり，さらに，正八面体の各面の重心を頂点とする立方体を作る。できた立方体の体積は，最初の立方体の体積の何倍か。

1　半球の半径を 1 とする。この容器の容積は，

$$V_0 = \frac{2}{3}\pi$$



傾けたときの様子は右のようになる。このときの水の体積を積分で求める。

球の中心を原点として下向きに x 軸，右向きに y 軸をとると，求める体積は，

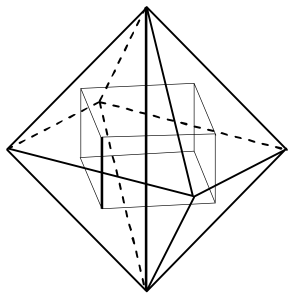
$$V = \pi\int_{1/2}^{1} y^2 dx = \pi\int_{1/2}^{1}(1-x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \frac{5}{24}\pi$$

求める割合は，

$$\underline{\frac{V}{V_0} = \frac{5}{16}}$$

2　正八面体の各面の重心を結ぶのであるから，小さい立方体の一辺の長さは，正八面体の高さの $\frac{2}{3}$ であるが，正八面体の高さは，立方体の一辺の長さに等しい。つまり，できた立方体は，元の立方体の相似比が $\frac{2}{3}$ となる。体積比ならこの 3 乗で $\underline{\frac{8}{27}}$ である。

（右図の太い 2 つの縦線の比を考えている。（正八面体の中心軸が外側の立方体の一辺の長さに等しい））



---

1 は，積分の有名問題です。積分をするためには座標がどうしても必要になります。そこで自分で座標を設定しなければいけないのが大変ですね。

2 は，数的処理で有名な双対な立体です。図形の意味がわかったかどうかが大切ですね。