

1 長方形 ABCD の 3 辺の和 $AB + BC + CD$ を一定にしたまま、長方形の面積を最大にしたい。このとき、 $AB : BC$ を求めよ。

2 z 軸を軸に持つ直円すい $x^2 + y^2 = (az)^2$ ($0 \leq z$, a は正の定数) の表面を動く動点 P がある。この動点を z 軸方向から眺めると、この動点は角速度 $1[\text{rad}]$ で反時計回りに回っている。一方、この点は、 z 軸方向には、正方向に、大きさ 1 の等速度運動をしている。動点 P が $z = 1$ に達したときの P の加速度の大きさはいくらか

1 $AB = x$, $BC = y$ とおく。一定値を a とおくと、 $2x + y = a$ が条件である。このとき、求める面積は、

$$S = xy = x(a - 2x) \quad \therefore \quad S' = a - 4x = 0$$

以上より、 $x = a/4$, $y = a/2$ であり、 $AB : BC = 1 : 2$

2 与えられた条件から、 $(x, y) = (az \cos t, az \sin t)$, かつ、 $z = t$ とおける。これを時間微分して、速度ベクトルは、

$$(v_x, v_y, v_z) = (a \cos t - at \sin t, a \sin t + at \cos t, 1)$$

さらに微分して、

$$(-2a \sin t - at \cos t, 2a \cos t - at \sin t, 0)$$

これと、 $at = 1$ より、もとめる加速度の大きさは、三平方の定理から $\sqrt{4a^2 + 1}$

1 は、条件付き最適化の問題です。ラグランジュの未定乗数法でもいいのですが、式が簡単なので、代入法でも問題ありませんね。

2 も微分の問題です。条件を文字で置いて、きちんと微分すれば正解が出てきます。積の微分になることを忘れないようにしましょう。