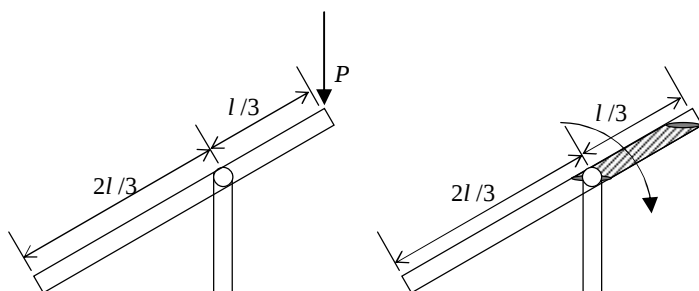


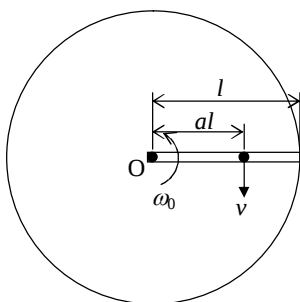
1 図のような位置に支点をもつ質量 m の竹筒がある。この竹筒は一様で、支点を中心として自由に回転できる。また、竹筒が図のように支えられているとき、竹筒と水平面のなす角度は 30° である。このとき、以下の各問いに答えよ。ただし、重力加速度は g とせよ。

(1) 左図のように、右端に鉛直下向きに荷重 P を加えて、竹筒を回転させる場合に必要の最も小さい荷重を P_0 とする。これを求めよ。さらに、同じく右端に、左下方向に水平面となす角が 45° になるように荷重を加えて、竹筒を回転させる場合必要の最も小さい荷重 P_1 は P_0 の何倍か。

(2) 右図のように、この竹筒の中には支点より上側部分に水を入れることができる。水の密度を ρ 、竹筒の中の断面積を A とする。静かに水を入れた場合に、竹筒が図の方向に回転する場合が存在するような m の最大値を求めよ（要するに鹿威しが動作するような竹筒の質量の条件を求めよ、ということ）。



2. 質量 m 、長さ l の一様な棒があり、その一端 O で固定されている。この棒の O から al (a は $0 < a < 1$ の定数) 離れた位置に、発射装置と共に、質量 m の小球が設置されており、最初角速度 ω_0 で一緒に点 O を中心に回っていた。ここで、発射装置を作動させ、回転方向と逆方向に小球を発射させたところ、発射装置に対する小球の相対速度が v となり、その一方で、棒の角速度は ω_1 となった。 ω_1 が最大となるような a の値を求めよ。なお、棒の O まわりの慣性モーメントは $ml^2/3$ である。



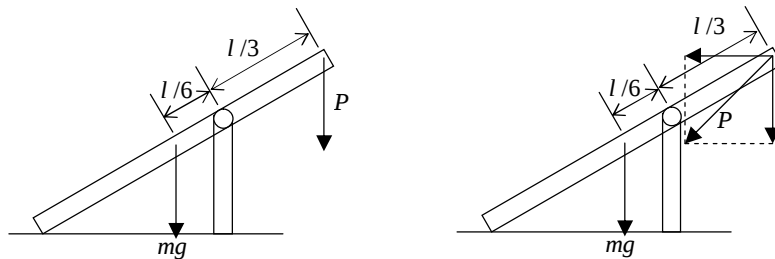
1 (1) 鉛直に荷重が加わる時には、左下図のようになる。支点まわりのモーメントのつり合いより、

$$P \times \frac{\sqrt{3}}{6} l = mg \times \frac{\sqrt{3}}{12} \quad \underline{P = \frac{1}{2} mg}$$

斜めに荷重が加わる時には、右下図のように、水平、鉛直に分けて、それぞれのモーメントを考える。反時計回りのモーメントと、時計回りのモーメントがつり合うので、

$$mg \times \frac{\sqrt{3}}{12} l + \frac{P}{\sqrt{2}} \times \frac{l}{6} = \frac{P}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{6} l \quad P = \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{3}-1)} mg = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} mg$$

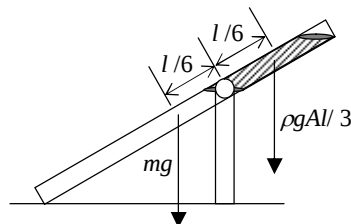
これは最初の答えの $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ 倍となる。(大体 3.3 倍)



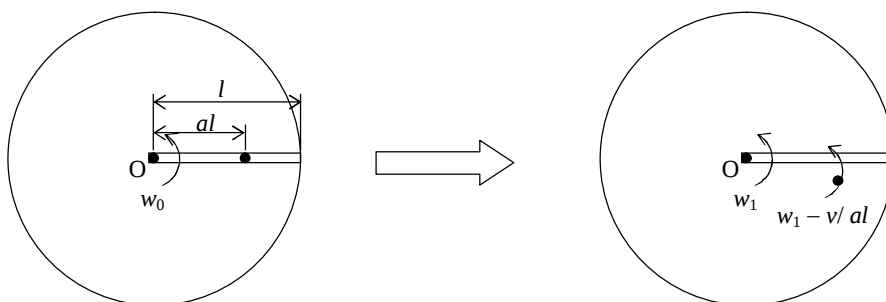
(2) 水の最大体積は、円柱の体積の公式から $V = \frac{Al}{3}$ となる。したがって、力は下の図のようになる。腕の長さが等しい

ので、単純に、水の質量が竹筒の質量を超えればよい。したがって、求める最大値は

$$\underline{m = \frac{1}{3} \rho Al}$$



2 角運動量の保存則を考える。このとき、分離後の小球の角速度が必要となる (v は相対速度であることに注意)。分離後の棒の角速度が w_1 であり、小球の中心からの距離が al であることから、小球の角速度は $w_1 - \frac{v}{al}$ となる。方向は図の通りである。



ここで、中心まわりの角運動量保存則より、

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + m(al)^2\right)w_0 = \frac{1}{3}ml^2w_1 + m(al)^2\left(w_1 - \frac{v}{al}\right) \quad w_1 - w_0 = \frac{alv}{\frac{1}{3}l^2 + (al)^2} = \frac{a}{3a^2 + 1} \frac{v}{l}$$

ここで、 $f(a) = \frac{a}{3a^2 + 1}$ とおくと、

$$f'(a) = \frac{3a^2 + 1 - a \cdot 6a}{(3a^2 + 1)^2} = \frac{1 - 3a^2}{(3a^2 + 1)^2} \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1 はモーメントのつりあいの問題です。力を図示して、モーメントを計算する、という流れを押さえてください。(回転を扱っているので、モーメントのつり合いとなります。力のつり合いを考えると、支点反力が入ってきます)(1)の後半で、力の各位置を作用点に合わせないと、モーメントの計算がうまくいきません。この点も確認しておいてください。

2 は、H.8 の国家 I 種の過去問です。と思って見直してみたら、原題は棒の質量を $m/4$ としていたようですが。数少ない角運動量保存則の本格的な問題です。相対速度まで入ってきていますので(実際の再現問題では、問題の意味が曖昧でしたが)この点も含めて見直しておいてください。かなり難しい問題かと思います。なお、途中、小球の角速度を求めるために、 $v = r\omega$ の公式を使っています。