

1. 一般に a^n (n は自然数) を計算する場合, かけ算を $n - 1$ 回行うことで計算できるが, 次のような手順を取ること
で, 回数を減らすことができる。

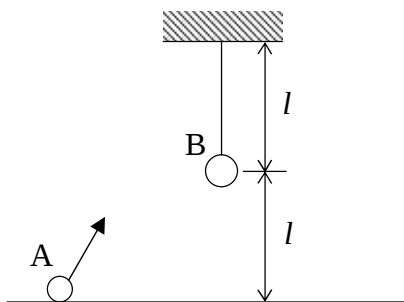
- (i) $a, a^2, a^4, a^8 \dots$ と順次累乗計算をすることで, 計算する (それぞれの値は記録しておく),
(ii) (i) を a^n を超える 1 つ手前でやめ, (1) で計算した値を組み合わせることで a^n になるようにかけ算する。

このような方法で a^n を計算していく。

- (1) $n = 25$ のとき, かけ算回数は何回になるか。
(2) n が 200 以下の数字のとき, かけ算回数は最大で何回となるか。

2. 図のように, 水平な床から, 高さ $2l$ の位置にある天井から糸の長さが l で, おもりの質量が m の振り子がつり下げ
られている。水平な床から, 同じく質量 m の物体 A を角度 θ , 初速 V で投げ上げたところ, B とちょうど真横から衝突
し, その後 A と B は一体となって運動した。そのときの最高点の床からの高さはいくらか。 l, V, θ で表せ。

ただし, 重力加速度を g とする。



1 (1) 以下の順序で計算すればよい。

$$a \times a = a^2, \quad a^2 \times a^2 = a^4, \quad a^4 \times a^4 = a^8, \quad a^8 \times a^8 = a^{16}$$

$$a^{16} \times a^8 \times a = a^{25}$$

合計で, 6 回かけ算をしている。

(2) 200 を 2 進数で表すと, 11001000 となる。

まず, 127 以下の数で, 最もかけ算回数が多いのは, 2 進数で 1111111 と表される 127 である。ここで 2 進数を考える
理由は, 2 進数で表したときに 1 となっている桁を最後にかけ算するため, 1 の数が多い方がかけ算回数が多くなるから
である。この場合 a^{64} を計算するために, 6 回かけ算し, 最後に, $a^{64} \times a^{32} \times a^{16} \times a^8 \times a^4 \times a^2 \times a = a^{127}$ と計算するので, 結
局, 合計 12 回かけ算をすることになる。

次に 128 以上の数で, 最も 1 が多くなるのは, 2 進数で 10111111 と表される 191 である。この場合, a^{128} を計算するた
めに 7 回かけ算し, さらに, $a^{191} = a^{128} \times a^{32} \times a^{16} \times a^8 \times a^4 \times a^2 \times a$ と計算して合計 13 回かけ算をすることになる。これが
最大となる。つまり, 最大は 13 回である。

2 初速の水平方向成分は $V \cos \theta$ である。ちょうど真横から衝突した, ということは, この速さが衝突直前の速さとい
うことになる。運動量保存則より, 一体となった後の速さはこの半分である。したがって, 力学的エネルギー保存則より,
求める最高点の高さ h は,

$$mgl + 2 \times \frac{1}{2} m \left(\frac{V \cos \theta}{2} \right)^2 = mgh \quad \underline{\underline{h = l + \frac{V^2 \cos^2 \theta}{4g}}}$$

-
- 1 事前にこの計算方法を知らないで難しい問題ではなかったかと思います。H.8 に直接この方法による問題が出題されていますが、H.18 も似たような出題となっています。2 進数を使っていますが、単純に(1)の計算法を記憶にとどめておくといよいでしょう。(2)は少し難しい問題だったかと思います。ほとんど数的処理ですね。
 - 2 最初の投げ上げについては細かく考えなくてもよい、というのがポイントでした。 V や θ の値を具体的に設定しておけばよかったかな、と今では思っていますが。最初さえ何とかしてしまえば、あとは、通常の運動量保存則、エネルギー保存則です。