

1. A 君と B 君で将棋の 5 番勝負を行うことにした。つまり、先に 3 勝した方が勝ちとし、3 勝した時点で以降の勝負は行わない。引き分け等は考えないものとして、A 君が 3 勝 1 敗で勝つ確率と、B 君が 3 勝 2 敗で勝つ確率が等しいとき、1 回の将棋の勝負で A 君が勝つ確率はいくらになるか。

2. A 君と B 君は将棋の勝負をして、先に 2 連勝した方が勝ちとした。1 回の勝負では、どちらも互角で、勝つ確率は 0.5 である。

(1) 先に A 君が 1 勝した、この後、最終的に A 君が勝つ確率を求めよ。

(2) 決着がつくまでの勝負数の期待値を求めよ。

1 A 君が 1 回の勝負で勝つ確率を p とする。まず、A 君が 3 勝 1 敗で勝つ確率は、最初の 3 試合で 2 勝 1 敗となつて、さらに 4 試合目に勝つたとして計算する。最初の 3 試合については、独立試行の確率より、2 勝 1 敗となる確率は、

$${}_3C_1 p^2 (1-p) = 3p^2 (1-p)$$

(仮に 2 連勝のあと負けたのなら、 $p^2(1-p)$ であるが、この他に 3 試合のうちどこで負けたのかによって ${}_3C_1$ 通りあるしたがって、3 勝 1 敗で A 君が勝つ確率は、 $3p^3(1-p)$)

一方、2 勝 3 敗で A 君が負ける確率は、最初の 4 試合で 2 勝 2 敗となり、最後に B 君が勝つと考えて、

$${}_4C_2 p^2 (1-p)^2 \times (1-p) = 6p^2 (1-p)^3$$

したがって、

$$3p^3(1-p) = 6p^2(1-p)^3 \quad \therefore \quad p = \underline{1/2} \quad (\text{なお、} p=0, 1 \text{ を加えた場合も正解としてください})$$

2(1) A 君が最終的に勝つ確率 (求める確率) を P とおく。このばあい、B 君が勝つ確率を求めると、そのためには 2 試合目にまず B 君が勝たねばならず、さらに、2 試合目を勝つと、今度は B 君が 1 試合目後の A 君とおなじ立場になるため、 $\frac{P}{2}$ となる。したがって、全確率が 1 なので、

$$P + \frac{P}{2} = 1 \quad \therefore \quad \underline{P = \frac{2}{3}}$$

(2) どんな場合でも 2 試合目までは行われる。求める試合数を n とおく。そこで、2 試合目以降の場合を考えると、これ以降は、平均して $n-1$ 回試合をすることになる。ここで、2 試合で終わる確率は、1 試合目に勝った方が連勝すればよいため $\frac{1}{2}$ になる。一方、3 試合目に入ると、それ以降の試合数の平均は (2 試合目と 3 試合目は連勝にリーチをかける人が

逆になる以外は同じ立場になるため、) $n-1$ となる。また、3 試合目以降にもつれ込む確率は $\frac{1}{2}$ となる。したがって、求める期待値は、

$$n = 2 \times \frac{1}{2} + (n-1+2) \times \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \underline{n=3}$$

1はいわゆる日本シリーズ,あるいは7番勝負の確率の5番勝負編です。独立試行の確率を確認してもらいたいことと,この問題では最終試合だけが特別扱いですので,その点の確認をしてもらいたい,ということで出題しました。

2は,無限試行の確率です。ただし,状況がかなり単純ですので,教養などでも出題される可能性があると思います。地上・国2では,H.14の国2で出題がありますし,電気・電子・情報職ではそれ以外でも出題がありますが,必ずしも出題可能性は高くないと思います。一方,国1では出題が何度かあります。期待値についてはH.17に出題があります。上の解答では,その時の出題を意識しています。

ただし,状況が単純ですので,いずれも無限等比級数として計算することが可能です。

(1)は, $0.5 + 0.5 \times 0.25 + 0.5 \times 0.25^2 + 0.5 \times 0.25^3 + \cdots$

(2)は, $S = 2 \times 0.5 + 3 \times 0.5^2 + 4 \times 0.5^3 + 5 \times 0.5^4 + \cdots$

です。(後のものは, $2S - S$ を計算してください。これも万一のための計算練習として計算してみるとよいでしょう)