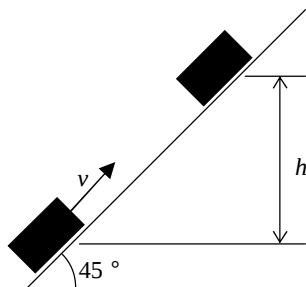


1. $\int_1^e \log x dx$ および $\int_1^e (\log x)^2 dx$ を計算しなさい。

2. 粗い板で斜面をつくる。図のように斜面の角度を 45° にして、斜面上方にブロックを速さ v で打ち出したところ、高さ h の点まで滑って静止した。斜面の角度を 30° にして、同様に斜面上方に同じブロックを速さ v で打ち出すと、到達する高さは h の何倍になるか。ただし、斜面とブロックとの間の動摩擦係数を 1 とする。



1 部分積分をする。

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$$

同じようにして、

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = [x(\log x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \log x dx = e - 2$$

2 まず、摩擦力の大きさを求めておく。斜面の角度を θ とすると、斜面方向の力の釣り合いから、垂直抗力 N は、

$$N = mg \cos \theta$$

したがって、動摩擦係数が 1 なので、摩擦力も $mg \cos \theta$ である。これより、エネルギー保存則をたてると、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg \cos \theta \times \frac{h}{\sin \theta} = mgh \quad h = \frac{v^2}{2g} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\theta = 45^\circ \text{ とすると } h = \frac{v^2}{4g}, \quad \theta = 30^\circ \text{ とすると } h = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)v^2}{4g}$$

これより、 $\sqrt{3} - 1$ 倍

1 は部分積分の練習です。いずれも有名な積分ですね。

2 はエネルギー保存則の練習です。摩擦が入ると少しややこしくなります。摩擦力の大きさも角度と共に変わりますので、その点を注意しましょう。国家 II 種，地方上級を受ける人は、このレベルの問題を確実に解けるように練習したいところです。