

1. 十分な大きさの3つのピンA, B, Cがある。最初Aのみにある量の水が入っている。ここから, 次の(a)~(c)の操作を行うことを考える。

(a) Aのピンに入っている水のうち $\frac{1}{2}$ をBにうつす。

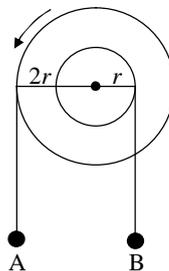
(b) Bのピンに入っている水のうち $\frac{1}{3}$ をCにうつす。

(c) Cのピンに入っている水のうち $\frac{1}{4}$ をAにうつす。

(1) この操作を同時に行うことにする(同時に水を取り出して, 同時に移す)。この操作を無限に行くと, 操作を行った直後の水の量はある値に近づく。水全体のうち, Aに入っている水の割合はどの値に近づくか。

(2) この操作を(a), (b), (c)の順番で行い, これで1回の作業とする。この作業を無限に行っていくと, 作業を終えた直後の水の量はある値に近づく。水全体のうち, Aに入っている水の割合はどの値に近づくか。

2. 水平な回転軸を持ち, 滑らかに回転する滑車がある。この滑車には図のように糸が巻き付けられ, 質量 m のおもりAとBがぶら下げられている。この滑車の内輪と外輪の半径はそれぞれ r と $2r$ で, 慣性モーメントは mr^2 である。このとき, Aの加速度を求めよ。ただし, 糸はすべらないものとする。



1 (1) 収束した前提で考える。移しても水の量が変化しないということは, (入ってきた量) = (出ていった量) ということである。この場合, A, B, C すべてについてこの関係が成り立つので, 結局, 移した量はすべて同じということになる。そこで, $A : B : C = a : b : c$ とすると ($a + b + c = 1$),

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \quad \underline{a = \frac{2}{9}}$$

(2) 同様に考えて, 移動量がすべて等しいのであるが, 順番に移していることに注意すると, Bについて,

$$\frac{a}{2} = \frac{b + \frac{a}{2}}{3} \quad a = b$$

Cについて,

$$\frac{b + \frac{a}{2}}{3} (= \frac{a}{2}) = \frac{c + \frac{a}{2}}{4} \quad c = \frac{a}{2}$$

これより, $\underline{a = \frac{1}{4}}$

2 運動方程式をたてる。A の加速度を a , B の加速度を b (上向き) , 角加速度を β とおく。また , A の糸の張力を T_A , B の糸の張力を T_B とする。

A についての運動方程式は ,

$$ma = mg - T_A$$

B については ,

$$mb = T_B - mg$$

滑車については ,

$$mr^2\beta = 2T_A r - T_B r$$

滑らずに回転するので ,

$$a = 2r\beta , b = r\beta$$

以上を解いて , $a = \frac{g}{3}$

1 はいわゆる無限試行の問題で , 漸化式をたてて解くのが普通かと思いますが , そうしなくとも解くことができます。収束している問題は , 収束した後の状況で考える , というのが鉄則です。

2 は典型的なアトウッドの滑車の問題です。国家 I 種直前ですので , 簡単な練習として。