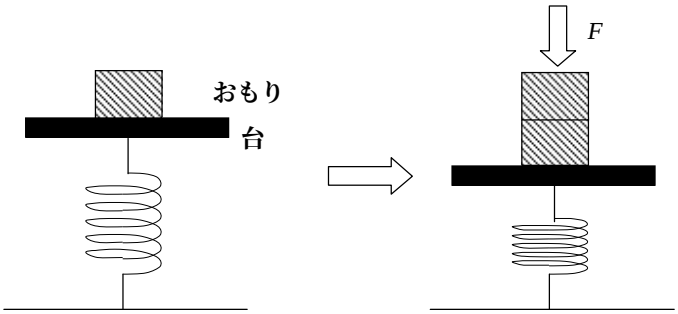
1．座標平面内に，放物線 $C : y = x^2$ と，原点を通らない直線 L があり，L は点(1，0)を通り C に接している。このとき，C，L，x 軸に囲まれた部分の面積を求めよ。

2．左下図のように，水平な床に鉛直にばねが取り付けられ，その上に台が取り付けられている。この状態で，台に静かに質量 m のおもりを載せ，完全に固定した（以降，このおもりは台から離れない）。このとき，ばねは自然長から a だけ縮んでいる。次に，さらに質量 m のおもりを静かのせた。この状態で，上から手で力 F を加えて静かに手を離した後の物体の運動を考える。

(1)　**$F = mg$ のとき，おもりの速さの最大値はいくらになるか。**

(2)　**上に載せたおもりが，下のおもりから離れるための F の最小値を求めよ。**

(3)　**F を(2)の 2 倍にした場合，上のおもりが再び下のおもりと衝突するまでに到達する最大の高さは a の何倍になるか。力 F を加える前のつり合いの状態の高さを基準として答えよ。ただし，おもりの大きさは考えなくてよい。**



1　**L の式を** $y = a(x-1)$**とおく。これと** $y = x^2$ **が接するので，**

$$x^2 - ax + a = 0$$

が重解を持つ。判別式を考えると，

$$D = a^2 - 4a = 0 \qquad \therefore \quad a = 4$$ **（原点を通らないので）**

このとき，接点は，(2 , 4)**となる。したがって，求める面積は，**

$$\int_0^2 x^2 dx - \int_1^2 4(x-1)dx = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

2(1)　**速さが最大になるのは，釣り合い位置である。**

ここで，バネと離れない間は，釣り合い位置を原点とするエネルギー保存を考える場合，バネの伸びも釣り合い位置を規準にして考えると，重力による位置エネルギーを無視できる。したがって，

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}2mv^2 \qquad \therefore \quad v = a\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

(2)　**おもりが離れるのは，バネが自然長のときである。したがって，自然長まで戻ればよいので，** $F = 2mg$

(3)　**自然長で離れるときのおもりの速さを** u **とすると，エネルギー保存則より，最初の縮み量は，おもりの重力による** $2a$ **と，力を加えることによる** $4a$ **があるので，**

$$\frac{1}{2}k(6a)^2 = \frac{2m}{2}u^2 \qquad \therefore \quad u = 6a\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

求める高さを H **とすると，エネルギー保存則より，**

$$2mga + \frac{1}{2}mu^2 = mgH \qquad \therefore \quad H = 2a + \frac{36a^2}{2g} \times \frac{k}{2m} = 2a + \frac{9a^2k}{mg} = 11a$$

１　まず，接線を求めることが大切です。このほかに微分を使うことも出来るでしょう。面積については，わかりにくい場合は図を書いてみてください。

２　ちょっと難しめのばねの問題です。(1)では釣り合い位置をエネルギーの原点にとっていますが，(3)では自然長位置にとりました。