

1. 座標平面上に、円 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ と、直線 $L: 3x + 4y - 1 = 0$ がある。 L が C によって切り取られる長さを求めよ。

2. 水の上に 200cm^3 の氷を浮かべたところ、 16cm^3 だけ水面の上に浮いた。ここに鉛直下方に力を加えて氷を完全に水面の下に沈めたい。必要な最低の力 $F[\text{N}]$ を求めよ。水の密度を $1[\text{g}/\text{cm}^3]$ とする。

1. 円の式は次のように変形できる。

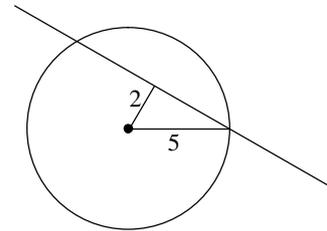
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

つまり、この円は中心が $(1, 2)$ で、半径が 5 である。一方、円の中心と L との距離は、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

である。求める長さは右図を参考に、

$$2\sqrt{5^2 - 2^2} = 2\sqrt{21}$$



2. 完全に沈めると、沈めた体積が 200cm^3 であるので、浮力が 200gf 加わる。

一方で、力を加えないと、水面下に $200 - 16 = 184\text{cm}^3$ 沈んだ状態がつり合うので、この状態で浮力と重力がつり合うことから氷の重力が 184gf であることがわかる。したがって、必要な力は、

$$F = 16\text{gf} = \underline{0.16\text{ N}}$$

1. 平面図形の基本問題です。交点の座標を求めてもよいのですが、少々計算量が多くなります。点と直線の距離の公式、およびこの立体バージョンである点と平面の距離の公式はおさえておきましょう。

2. 浮力の基本問題で、浮力の公式さえ知っていれば難なく解くことができるでしょう。浮力の問題は多くの場合、重力と浮力のつり合いになることをおさえておいてください。本問では、もちろん 16cm^3 水中に沈めるので、その分の水の重さだけ力を加えればよい（アルキメデスの原理）としてしまって OK です。