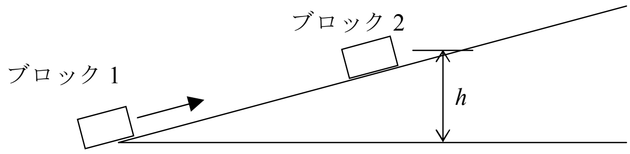
1．水平面を $z=0$ として，xyz 直交座標（z 軸正方向を鉛直上方にとる）をとる。水平面の上に砂山が置かれており，その表面の式が $z=h-x^2-y^2$ で表されている。この砂山の体積を求めよ。砂山は中もぎっしり詰まっているとする。

2．図のような斜面があり，高さ h の所にブロック 2 が置かれている。これとは別のブロック 1 を斜面の一番下におき，運動エネルギーE を与えて，斜面の上方に打ち出した。その後，2 つのブロックは弾性衝突を行った。ここで，2 つのブロックの質量の和は常に M とする。重力加速度を g とし，空気抵抗，摩擦はないものとする。また，E は，Mgh より大きく，$2Mgh$ より小さいものとする。

(1) ブロック 1 の質量が $M/3$ のとき，衝突後，ブロック 2 が到達する斜面最下端からの最大の高さを，E，M，g，h を用いて表せ。

(2) 2 つのブロックの質量をいろいろに変えるとき，衝突後，ブロック 2 が到達する最大の高さを最大にするためのブロック 1 の質量を E，g，h で表せ。



1，$z=k$ で曲線を切ると，$x^2+y^2=h-k$ となる。これは円であり，その面積 $S(k)$は $S(k)=\pi(h-k)$

したがって，求める体積は，

$$V=\int_0^h \pi(h-k)dk=\frac{\pi h^2}{2}$$

2．(1) 衝突直前のブロック 1 の直前の速さを v とし，衝突直後のブロック 1 の速さを v_1，ブロック 2 の速さを v_2 とする。運動量保存則より，

$$\frac{M}{3}v=\frac{M}{3}v_1+\frac{2M}{3}v_2$$

弾性衝突なので，

$$v_2-v_1=v$$

これを解いて，$v_2=\frac{2}{3}v$ となる。求める高さを H とすると，エネルギー保存則より，

$$\frac{2}{3}MgH=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}M\left(\frac{2}{3}v\right)^2+\frac{2}{3}Mgh \qquad \therefore \quad H=\frac{2}{9}\frac{v^2}{g}+h$$

ここで，

$$\frac{1}{3}Mgh+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Mv^2=\frac{1}{3}Mgh+\frac{1}{6}Mv^2=E \qquad \therefore \quad v^2=\frac{6E}{M}-2gh$$

であるので，

$$H=\frac{4E}{3Mg}+\frac{5}{9}h$$

(2) 同じように解いていく。ブロック 1 の質量を m_1，ブロック 2 の質量を m_2 とする。

運動量保存則より，

$$m_1v=m_1v_1+m_2v_2$$

弾性衝突するので,

$$v_2 - v_1 = v$$

これを解いて,

$$v_2 = \frac{2m_1 v}{M}$$

エネルギー保存則を使って，求める高さ H は,

$$m_2 gH = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1 v}{M}\right)^2 + m_2 gh \qquad \therefore \quad H = \frac{2m_1^2}{M^2 g}v^2 + h$$

ここで

$$E = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 gh \qquad \therefore \quad v^2 = \frac{2E}{m_1} - 2gh$$

を代入して,

$$H = \frac{4m_1 E}{M^2 g} - \frac{4m_1^2}{M^2}h + h \qquad \therefore \quad \frac{dH}{dm_1} = \frac{4E}{M^2 g} - \frac{8m_1 h}{M^2} = 0$$

したがって,

$$m_1 = \frac{E}{2gh}$$

（なお，これは与えられた条件を満たしている）

１は空間図形の体積を積分で求める問題です。空間座標に少し慣れることと地方上級で過去に出題された問題の類題を紹介する意味合いがあります。

２は，衝突とエネルギー保存則の問題の練習としての出題でしたが，(1)もやや難しいと思います。もし，E ではなく，最初の速さ u を与えていたら難しい問題ではなかったはずです。そうだとしたら，まずは u を使って解いてみる，というのが方針になります（解答で u は登場していませんが，同じような考えです）(2)も似たような問題ですが，うまく M をおかないといけませんね。