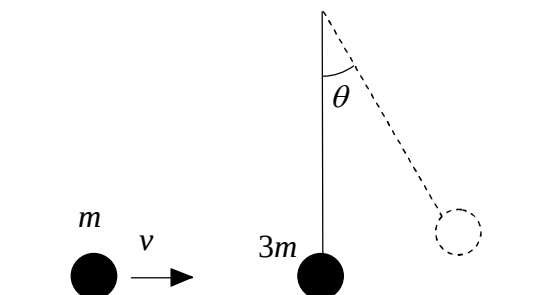


1. 曲線 $C: y = x^3 - 3x$ の $x = 3$ における接線と C の囲む部分の面積を求めよ。

2. 図のように、滑らかな水平面上に質量 m のおもりと、質量 $3m$ のおもりがあり、質量 $3m$ のおもりは長さが l の糸につながれている。いま質量 m のおもりに速度 v をあたえて質量 $3m$ のおもりと衝突させたところ、衝突後、糸が鉛直線に対して 90 度よりも小さい角度 θ まで振れた。このとき、2 つのおもりの間のはね返り係数を求めよ。重力加速度は g とする。



1 $y' = 3x^2 - 3$ なので、傾きは $x = 3$ で 24 である。接点が $(3, 18)$ なので、接線は、

$$y = 24(x - 3) + 18 = 24x - 54$$

となる。これと C との交点を求めると、

$$x^3 - 3x - (24x - 54) = (x - 3)^2(x + 6) = 0 \quad \therefore x = -6$$

これより、求める面積は、

$$S = \int_{-6}^3 (x - 3)^2(x + 6) dx = \frac{9^4}{12} = \frac{2187}{4}$$

2 まず、衝突直後の $3m$ のおもりの速さを V 、 m のおもりの速さを u とおく。運動量保存則より、

$$mv = mu + 3mV$$

跳ね返り係数を e とおくと、

$$ev = V - u$$

これを解いて、

$$V = \frac{1+e}{4}v$$

つぎに、この V を使って、おもりの上った高さまでエネルギー保存則を使うと、

$$\frac{3}{2}mV^2 = 3mgl(1 - \cos \theta) \quad \therefore V = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$$

この 2 つの式が等しいので、

$$e = \frac{4\sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}}{v} - 1$$

1 は接線と面積に関する問題です。積分公式を使っていますが、いずれにしても計算が大変です。なお、曲線と接線の交点を求めるところでは、接点で重解を持つことを積極的に使うと、因数分解が簡単になります。

2 は衝突とエネルギー保存則の融合問題です。今回も文字の与え方が意地悪ですので、自分に都合の良い文字をつかって解いていきましょう。