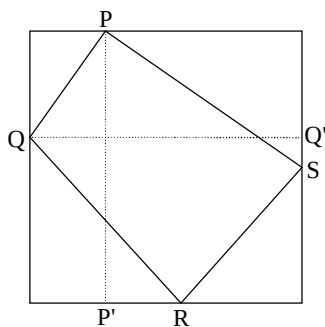


1. (1) 1 辺の長さが 10 の正方形に図のような線を引くとき、四角形 PQRS の面積を求めよ。点線は正方形の辺に平行な補助線であり、 $P'R = 2$ 、 $Q'R = 1$ である。

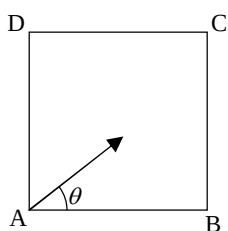


- (2) 三角形 ABC がある。A が PB の中点、B が QC の中点、C が RA の中点となるように P, Q, R をとるとき、三角形 PQR の面積は、三角形 ABC の面積の何倍か。

2. 1 辺の長さが 1 の正四面体 O-ABC について、次のものを求めなさい。

- (1) 体積
- (2) OA と底面 ABC のなす角 θ の余弦 $\cos \theta$ (国家 II 種)
- (3) 正四面体を辺 OA, OB の中点を通り、OC に平行な面で切ったときにできる切り口を底面にもち、O を頂点とする四角錐の体積 (H.21 国家 I 種)
- (4) 平行な 2 つの辺の中点を結ぶ線分の距離

3. 正方形 ABCD がある。今、この頂点 A から大きさの無視できる球を打ち出したところ、各辺に合計 22 回衝突してある頂点に到達して停止した。このとき、打ち出した角度 θ (図を参照) に対し $\tan \theta$ として考えられるものは 4 つあるが、このうち停止するまでの移動距離が小さくなるものを答えよ。ただし、球が辺に当たって反射するとき、入射角と反射角は等しい。



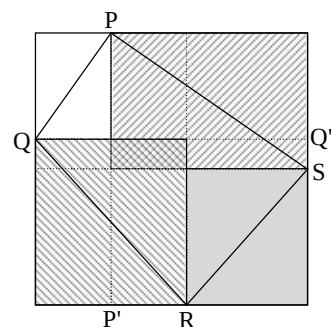
- 1 (1) 四角形の面積を、正方形から周囲の 4 つの三角形を引くことで求める。

これを図のように分けて考える。

この図で、たとえば、右下の直角三角形は灰色の長方形の面積の半分である。同様に、右上は左下がりが斜線の長方形、左下は右下がり斜線の長方形、左上は、白い長方形の面積の半分である。

ここでこの 4 つの長方形の面積の合計は、中央部分で重複があることに注意して、 $100 + 2 = 102$ である。その半分で、周囲の三角形の合計で 51 となる。

求める面積は、 $100 - 51 = 49$

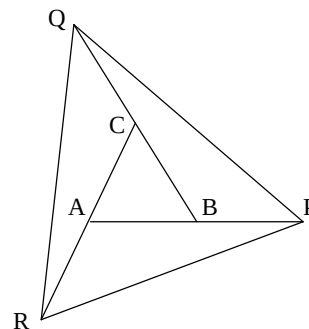


(2) これを図示すると次のようになる。

ここで、周囲の三角形の面積を中央の三角形と比較すると、どれも 2 倍になる。

(底辺の長さが同じで、高さが 2 倍)

したがって、 $\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の 7 倍



2(1) 1 辺の長さが 1 の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。

次に、頂点から底面に下ろした垂線の足は、底面の重心になる。

これを利用して、図において、 $GM = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(重心の性質： $AG : GM = 2 : 1$)

したがって、 $\triangle OGM$ について三平方の定理をたてると、

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

求める体積は、

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

(2) $\triangle OAG$ は直角三角形で $AG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ であるので、 $\cos \theta = \frac{AG}{OA} = \frac{\sqrt{3}/3}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) まず、 OA 、 OB の中点を通り、 OC に平行な面で正四面体を切ると、正四面体は 2 つに分かれる。

この 2 つの立体は合同なので、それぞれの体積は正四面体の半分である。

次に、ここから三角錐 $O-CMN$ をひけば求める体積になるが、 $O-CMN$ の体積は、

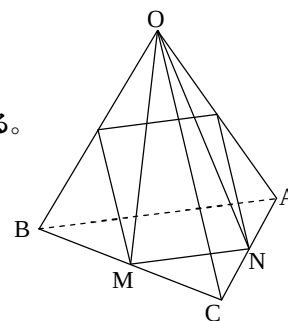
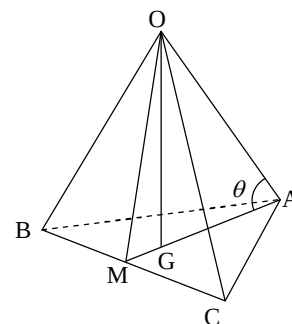
底面積を考えれば、正四面体の体積の $1/4$ であるので、求める体積も正四面体の $1/4$ である。

したがって、体積は $\frac{\sqrt{2}}{48}$

(4) (1)の図の $\triangle OMA$ について、 M から OA に下ろした垂線の長さが求めるもので、

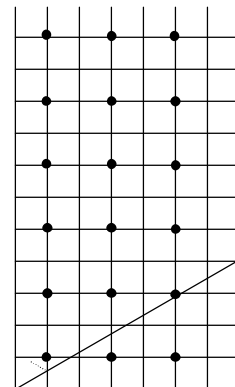
$\triangle OMA$ が二等辺三角形なので、

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



1つの四角形を考える代わりに、この四角形を各辺に対して線対称に対称移動させた図形を繰り返し作っていくと下のようになる。この場合、球の軌跡は、反射した場合に入射角と反射角が等しくなるので、反射させる代わりにこれを線対称に対称移動させて考えてもよく、そうすると軌跡は直線になる。

ここで、図中の黒点は点Cを移動させた点である。これらはいずれも、右の格子が座標を表すと考えた場合、 x 座標も y 座標も奇数の点である。そして、この場合、球は原点から打ち出され、座標が1増えるごとに壁を通過していることになる。したがって、22回衝突した、ということは、 x 座標の整数部分と y 座標の整数部分の合計が22となり、最後に x 座標と y 座標が1ずつ同時に増えたところがCとなるので、結局 $x + y = 24$ (x, y は自然数)が条件となる。 45° より小さいので、考えられる座標は、



(23, 1), (21, 3), (19, 5), (17, 7), (15, 9), (13, 11) のいずれかである。

ただし、途中で格子点を通ってはいけないので、結局は (23, 1), (19, 5), (17, 7), (13, 11) のいずれかとなる。こ

の中で距離が最小なのは (13, 11) なので、 $\tan \theta = \frac{11}{13}$

1はいずれも、教養で出てきそうな図形の有名問題です（実際出題されています）。有名問題ですから覚えておくことになりますね。

2は正四面体に関するいろいろな問題です。別解はいくらでも考えられます。(1)は教養のことを考えると、答えを覚えていてもいいでしょう。(2)は多くの解き方があります。たとえば、 $\triangle OMA$ について余弦定理を使えば、垂線が重心に下りることを知らなくても解くことができます。

3は、有名問題なのですが、知らないとも足も出ないかと思います。過去、国家I種、東京都の教養で出題がありますが、それよりも難しいと思います。