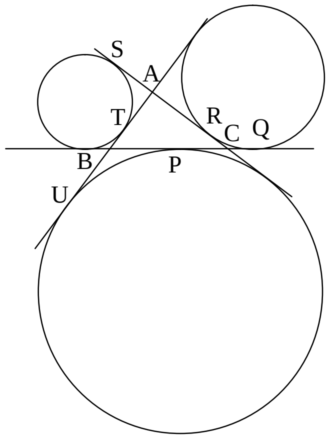
1．図の三角形 ABC は，AB = 3，AC = 4，BC = 5 である。図のように，三角形の 1 つの辺と，2 つの辺の延長線に接する円を考える。P，Q，R，S，T，U は接点である。PQ：RS：TU を求めよ。（地方上級）

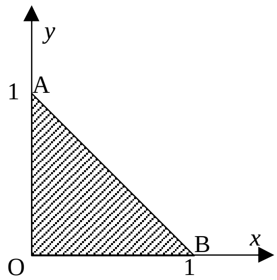


2．座標平面上において，$y = ax$（a は正）は，$y = x$ と $y = 2x$ が作る鋭角を二等分するという。a の値を求めよ。

3．図の斜線のような直角 2 等辺三角形がある（AB の式は $x + y = 1$）。これを x 軸を軸にして回転させてできた立体を，更に y 軸を軸にして回転させてできた立体を考える。

(1)　その概形を図示せよ。

(2)　その体積を求めよ（一応求めたのですが，正しいか確認していないので，参考扱いで）



1　全体として，2 つの接線が交わっているとき，接点と交点の距離はどちらの接線についても等しい，という関係を使っていく。

　ここでは BU の長さを求めてみる。

　最初に書いた性質から，BP = BU，CP = CU'となる。

そこで図のように，BP = a，CP = $5 - a$ とおく。

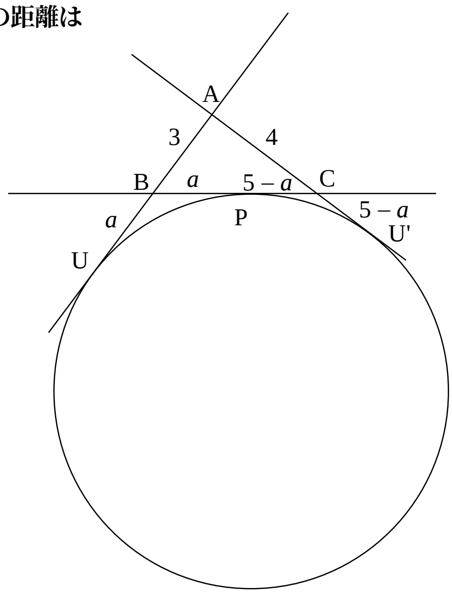
　次に，円の 2 つの接線 AU，AU'も A で交わっているので，

AU = AU'となる。したがって，

$$3 + a = 9 - a \qquad \therefore \quad a = 3$$

　同様に計算すると，AR = 3，RC = 1，AT = 2，BT = 1 となる。

したがって，<u>PQ：RS：TU = 3：5：4</u>



２． x **軸と直線のなす角度を** θ **とし，直線の傾きを** a **とすると，** $a=\tan\theta$ **が成立する。そこで，求める直線の** x **軸正方向となす角度を** θ, $y=2x$ **が** x **軸正方向となす角度を** ϕ **とする。なお，** $y=x$ **が** x **軸正方向となす角度は** 45 ° **である。**

ここで，求める直線が二等分線なので，

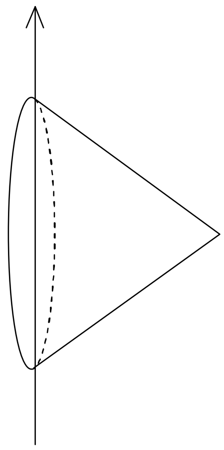
$$\tan(\varphi-\theta)=\tan(\theta-45^\circ)$$

tan **の加法定理より，**

$$\frac{\tan\varphi-\tan\theta}{1+\tan\varphi\tan\theta}=\frac{2-a}{1+2a}=\frac{\tan\theta-\tan45^\circ}{1+\tan\theta\tan45^\circ}=\frac{a-1}{1+a} \qquad \therefore\quad \underline{a=\frac{1+\sqrt{10}}{3}}$$

３(1)　x **軸を中心として回転させると円錐になる。この円錐は下図のようになる。これを図の軸を中心に回転させると，円錐の底面以外の部分は，すべて底面を回転させた部分の内側に入る。したがって，結局，底面だけを回転させたことと同じになるが，それは半径** 1 **の球である。**

(2)　**半径** 1 **の球なので** $\frac{4}{3}\pi$



１　以前の地方上級の過去問です。答えを見れば簡単そうに思えるのですが，相当難しいと思います。使われた接線の性質は有名なものですので覚えておくと良いと思います。あかたもパズルみたいですね。

２　これは傾きと正接の関係を知っていれば解くことが出来ます。時々使う性質ですので覚えておいてください。他にも方法はあるのですが，この方法が一番速いでしょう。

３　過去の国家Ｉ種の教養です。完全なパズルですね。(2)**は蛇足でした（球だとわかっていたのに出題時に勘違いしていました）。すぐには納得いかないかもしれませんが，たとえば，円錐を軸を含む面で切ると下左図のような三角形になります。これを回転させると，結局底面の円部分（太線）を回転させた円と一致します。それ以外の（軸に平行な）面出来ると，切り口は双曲線になりますが，この場合でも，結局底面部分（太線部分）を回転させた円に完全に全体が含まれてしまいます。ですので，結局底面の円を回転させた球に完全に円錐は含まれてしまうのです。**