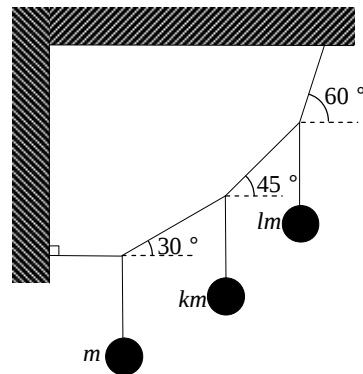
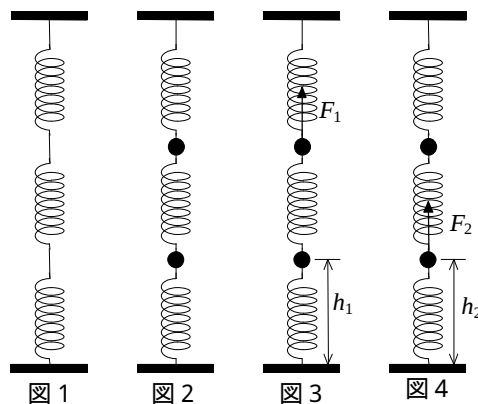


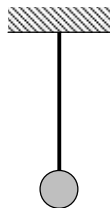
1. 図のような壁と天井から糸で3つのおもりがつるされている。その質量は、図の左から m , km , lm (k, l は定数) である。 k, m の値を求めよ。



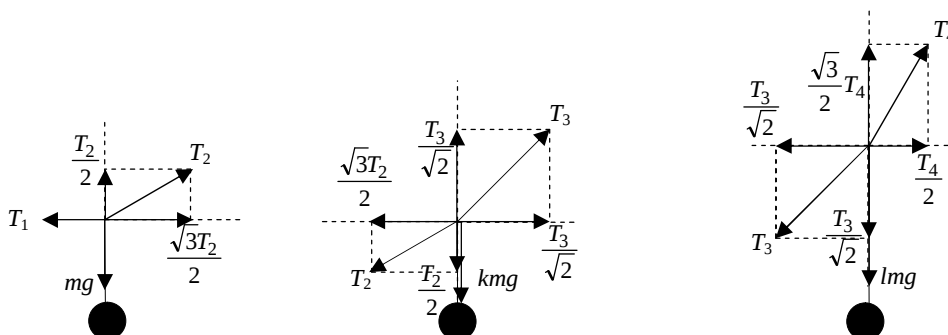
2. 図1のように、天井と床の間に鉛直に3つの等しいばねをとりつけた。3つともこの状態で自然長である。このばねの間に、質量が等しく大きさの無視できるおもりを図2のように取り付けた。いま、上のおもりに鉛直上方に力 F_1 を加えて、一番上のばねを自然長にする場合の、下のおもりの床からの高さを h_1 とし、下のおもりに鉛直上方に力 F_2 を加えて、一番上のばねを自然長にする場合の、下のおもりの床からの高さを h_2 とする。このばね1つに、おもり1つをつり下げたときのばねの伸びを h とすると、 $h_1 - h_2$ は h の何倍か。



3. 図のように、天井からゴム紐をつけ、その先に質量 m のおもりをつけ、静止させた。この状態におけるゴム紐の自然長からの伸びを a とする。つぎに、手でおもりを更に a だけ引っ張って静かに手を放すと、おもりは往復運動を始めた。この周期を T_1 とする。次に、再びおもりを静かに静止させ、そこから手で更に $2a$ だけ引っ張って手を放すと、おもりは往復運動を始めた。このときの往復運動の周期を T_2 とすると、 T_2 は T_1 の何倍か。ただし、ゴム紐は自然長より伸びているときにはばねとして扱うことができるが、たるんでいる間は、運動に一切の影響を与えない。



1 左から順に、糸がつり下げられている点について、力の釣り合いをたてる。ただし、糸の張力は左から順に T_1, T_2, T_3, T_4 とする。すると下の図のようになる。



左の図についての力の釣り合いより、

$$\frac{T_2}{2} = mg, \quad \frac{\sqrt{3}T_2}{2} = T_1$$

これを解いて、 $T_1 = \sqrt{3}mg$, $T_2 = 2mg$

中央の図についての力の釣り合いより、

$$\sqrt{3}mg = \frac{T_3}{\sqrt{2}}, \quad \frac{T_3}{\sqrt{2}} = mg + kmg$$

これを解いて、 $T_3 = \sqrt{6}mg$, $k = \sqrt{3} - 1$

右の図についての力の釣り合いより、

$$\sqrt{3}mg = \frac{T_4}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}T_4 = \sqrt{3}mg + lmg$$

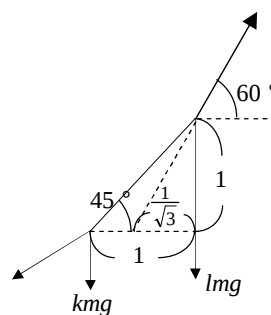
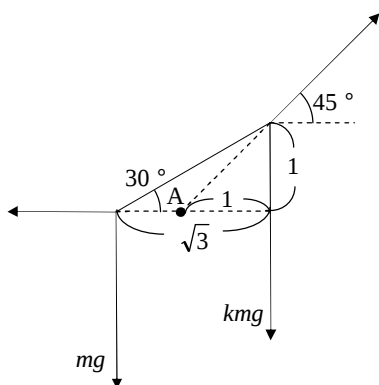
これを解いて、 $T_4 = 2\sqrt{3}mg$, $l = 3 - \sqrt{3}$

(別解)

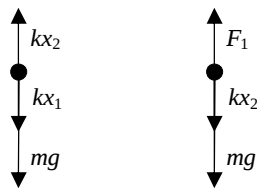
左と中央のおもりを合わせた部分について(左下图)考える。図のA回りのモーメントの釣り合いを考えると、

$$mg \times (\sqrt{3} - 1) = kmg \times 1$$

右図も同様に考えることができる。



2. 下のばねの伸びを x_1 , 中央のばねの伸びを x_2 とおく。おもりの質量は m , ばね定数を k とする。また , 上のばねは自然長なので , 力を及ぼさない。図3について , 下のおもりと上のおもりについての力の釣り合いより ,

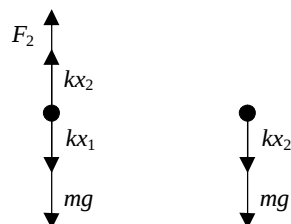


$$kx_2 = kx_1 + mg , \quad F_1 = kx_2 + mg$$

さらに , 伸びは全体で 0 でなければならないので , $x_1 + x_2 = 0$

$$\text{これより , } x_2 = \frac{F_1 - mg}{k} , \quad x_1 = \frac{F_1 - 2mg}{k} \quad F_1 = \frac{3}{2}mg , \quad x_1 = -\frac{mg}{2k}$$

次に図4についても同様に考える。



$$F_2 + kx_2 = kx_1 + mg , \quad 0 = kx_2 + mg$$

これと $x_1 + x_2 = 0$ を連立させる。

$$x_2 = -\frac{mg}{k} , \quad x_1 = \frac{F_2 - 2mg}{k}$$

となるので , $F_2 = 3mg$, $x_1 = \frac{mg}{k}$

これより ,

$$h_1 - h_2 = -\frac{mg}{2k} - \frac{mg}{k} = -\frac{3mg}{2k} = -\frac{3}{2}h$$

3. ゴム紐は , 自然長より長い間はばねと同じ役割を果たす。そして , この場合の振動の中心は釣り合い位置となる。 T_1 の場合 , ゴム紐が自然長より短くなることはないで , たんなるばね振り子と同じで ,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

一方 , T_2 の場合には , ゴム紐が自然長より短くなる場合がある。そこで , 場合を分けなければならない。

単振動をしている間

ゴム紐の振動は , 釣り合い中心を原点 , 下向きを正に座標を取ると , 次のように表される(上の周期を参考にする)。

$$x = 2a \cos\left(2\pi \frac{t}{T_1}\right)$$

ゴム紐が自然長になるのは , $x = -a$ のときであり , このとき ,

$$2\pi \frac{t}{T_1} = \frac{2\pi}{3} \quad t = \frac{T_1}{3}$$

さらに、単振動の式を微分して、

$$v = -\frac{4\pi a}{T_1} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_1}\right)$$

これより、自然長になるときのおもりの速度は、

$$v_1 = -\frac{2\sqrt{3}\pi a}{T_1}$$

ここで、おもりが最高点に上がるまでは重力による落下運動となる。そこで、等加速度運動の公式から、最高点に到達するまでの時間 t に関して、

$$gt - \frac{2\sqrt{3}\pi a}{T_1} = 0 \quad t = \frac{2\sqrt{3}\pi a}{T_1 g}$$

ここで、 a は釣り合い位置なので、 $ka = mg$

これを代入すると、

$$t = \frac{2\sqrt{3}\pi a}{T_1 g} = \frac{2\sqrt{3}\pi m}{T_1 k} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi T_1} \times 4\pi^2 \frac{m}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi T_1} \times T_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} T_1$$

以上から、求める周期は、

$$T_2 = 2 \times \left(\frac{T_1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} T_1 \right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) T_1$$

1 は、力の分解の練習を、という意図での出題です。面倒に思ったかもしれませんが、地道に力の釣り合いをたていけば必ず解くことができます。別解はモーメントの釣り合いを使うことで、計算を省いています。どこまでを 1 つの物体と見るか、また、モーメント中心を余計な力が消えるようなところにとることで、計算量を減らしています。土木職、機械職の専門でも時々使うことのできる手法です。ただし、結局長さが必要になりますので、本当に簡単になるかどうかは、出てくる図形次第です。

2 は、複数の物体がある場合の力の釣り合いです。明らかに鉛直方向の力の釣り合いしかなかったにもかかわらず、人によっては難しく思えたかもしれません。大切なことは、自分が今、どの物体について考えているのか、ということです。つまり、まずはおもりを一つ一つ取り出すことが正解への第一歩なのです。本問は H.10 の国家 I 種の類題ですが、それよりやや難しいかもしれません。同様の出題は H.21 の国家 II 種でも見られます（難易度は下がっていますが）。いずれにしても、この問題が解けるかどうかで、力学の実力を測ることができます。

3 は有名問題かつ難問です（有名かつ難問は H.21 にもありました。まあ全体から見れば解けなくてもよいのですが）。物理的に落ち着いてみれば当たり前ののですが、ちゃんと数字で倍率が出てくるところが面白いですね。解法のポイントは、単振動から抜けるまでの時間が、（数字の設定がうまくできているので）求まってしまうことと、等加速度運動の初速度を求めるところです。後者はもちろんエネルギー保存でも大丈夫です。実力のある人は考えてみてください。