

1. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき、 A^n を求めよ。ただし、 n は自然数、 a は 1 ではない定数とする。(H.21 労基)
2. $x > 0, y > 0$ とする座標平面上の四つの点 $A(x, y)$, $B(2x, y)$, $C(3x, 2y)$, D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。辺 AD の長さが $2\sqrt{2}$ 、対角線 AC の長さが $2\sqrt{5}$ のとき、点 B の座標を求めよ。

1 順次かけ算してみよう。

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \frac{a^2-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2+a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & \frac{a^3-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$\text{ここから } A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ と推測できる。}$$

- 2 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (x, y)$

これから、長さについて、

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{4x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$$

これを解いて、 $x = 2, y = 2$

これから、B の座標は (4, 2)

1 については、国家 I 種でも何回か出題があります。論理的には、ケーリー・ハミルトンの定理から、 $x^n \div (x^2 - (a+1)x + a)$ の余りを考えたり、3 項間漸化式を考えたり、固有値を考えたり、と解き方はいろいろあるのですが、国家 I 種も含めて、順次かけ算して類推できる場合ばかりですので、ここでもこの解答のみにしておきました。選択肢がありますので、証明は不要です。

2 は座標の問題ですが、平行四辺形ということから D の座標を求めることが大切です ($(2x, 2y)$ になります)。もしイメージがつかない場合には、簡単に図を書いてみると今回はすんなりわかるかと思います。