1． $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$を満たすベクトル **a**，**b**（いずれも 0 ベクトルではない）があるとき，ベクトル **a**，**b** のなす角はいくらか。（H.21 労基）

2． 3 人で 1 回じゃんけんをするとき，あいこになる確率はいくらか。ただし，各人がどの手を出すかは同様に確からしいものとする。（H.21 労基）

1　$|\,\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\,|^2 = |\,\mathbf{a}\,|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\,\mathbf{b}\,|^2 = 5|\,\mathbf{a}\,|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,|^2$

$\therefore\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2|\,\mathbf{a}\,|^2$

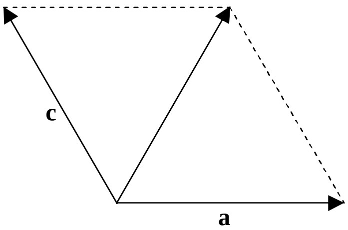
したがって，求める角度をθとおくと，内積について，

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\cos\theta = 2|\,\mathbf{a}\,|^2\cos\theta = -2|\,\mathbf{a}\,|^2$

$\therefore\quad \cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

これより，求める角度は 120°

（別解）$2\mathbf{b} = \mathbf{c}$ とおくと，$|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} + \mathbf{c}|$となる。つまり，ひし形で，辺の長さと 1 つの対角線の長さが等しい場合なので，下の図のケースと分かる（2 つの三角形が共に正三角形）。



2　あいこになるのは，3 人の出す手の種類が 1 種類または 3 種類になった場合である。3 人の出す手の総数は $3^3 = 27$ とおりであり，1 種類になるのは 3 通り，3 種類になるのは，たとえば 3 人が順番に手を出したとすると，どの順番に手が出るのかを考えればよいので，$3! = 6$ 通り。合計 9 通りであるので，求める確率は$\dfrac{1}{3}$

---

1 は公務員試験では特殊な出題と言えるでしょう。ベクトルの問題で角度と言われたら内積につきます。ですので，この問題でも内積が狙いとなるわけです。

2 は有名な確率で，正直結果を覚えておくべきものかとおもいます。じゃんけんで決着がつく確率は，上のように出る手が 2 種類になるとして計算するのが有名です。4 人以上の場合について東京都の教養などで出題がありますので，用意しておくべき問題でしょう。