1. 関数 $f(t)$ が次の 3 つの条件を満たすとき、定数 k の値はいくらになるか。

$$f(0) = 2, \quad f(1) = 4$$

$$\frac{df(t)}{dt} = k \left(1 - \frac{f(t)}{8} \right) f(t)$$

2. 三つの箱 A, B, C があり、箱 A には赤玉が 2 個のみ、箱 B には赤玉と白玉が 1 個ずつのみ、箱 C には白玉が 2 個のみ、それぞれ入っている。

これら三つの箱から無作為に一つの箱を選び、その箱の中から無作為に 1 個の玉を取り出す操作をしたところ、赤玉を取り出した。玉と箱を元に戻し、もう一度この操作を繰り返したところ、再び赤玉を取り出した。このとき、一度目と二度目の操作で選んだ箱が同じである確率はいくらか。

1 $f(t)$ を f と書く。変数分離をすると、

$$k dt = \frac{8 df}{(8-f)f} = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{8-f} \right) df$$

これを $f(0) = 2$ から $f(1) = 4$ まで積分して、

$$k \int_0^1 dt = k = \int_2^4 \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{8-f} \right) df = [\log |f| - \log |8-f|]_2^4 = \left[\log \left| \frac{f}{8-f} \right| \right]_2^4 = \log 3$$

2 赤玉を 2 回取り出す場合としては、

A A と取り出す

A B と取り出す

B A と取り出す

B B と取り出す

4 通りが考えられる。ただし と の確率は同じなので、 , , を求める。

$$: \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$: \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18}$$

$$: \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{36}$$

求める確率は、これらの中で、 , となる確率なので、

$$\frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{36}}{\frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{18} + \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{36}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \frac{5}{9}$$

いずれも H.21 理工 II の問題です。理工 I, 地方上級と比べ、少しだけ難しいという辺りを狙いました。

1 は変数分離の微分方程式の問題です。変数分離の形は最近、地方上級でも出題があります。ただし、ここではその後の積分処理も少し難しく、部分分数に分けなければいけません。とはいえ、理工 I の積分も少し難しいものが H.20 に出されましたので、これはおさえておいてもよいでしょう。

2 は条件付きの確率で、それ自体は国家 I 種, II 種, 地方上級を問わず何度も出題されています。ただ、本問は少し状況が複雑で難しくなっています。 と の場合をしっかりと分けることが大切です。良問です。