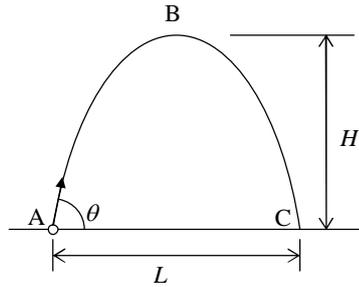


1. 図のように、水平な床の上の点 A から距離 L のところに点 C がある。点 A から仰角 θ で投げられた小球が、最高点 B に達した後に点 C に当たった。床から点 B までの高さが H であるとき、 $\tan \theta$ を求めよ。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。



2. 水平な地面上から、質量 m の物体を仰角 45° の方向に初速 v で打ち上げた。 t 秒後に物体が頂点に達したとき、質量の等しい二つの物体 A, B に割れ、ともに元の物体の分裂直前における飛行方向と同じ方向に飛んでいった。分裂直後の物体 A の地面に対する速さが $\frac{v}{2}$ であるとき、分裂後、物体 B が地上に落ちるまでに飛ぶ水平方向の距離を求めよ。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。

- 1 力学的エネルギー保存則より、初速度を v とすると（水平方向成分の運動エネルギーは変わらないので）、

$$\frac{1}{2}m(v \sin \theta)^2 = mgH \quad H = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

次に、等加速度運動の公式より、A 点から鉛直上方に y 軸、水平方向に x 軸をとると、

$$\begin{cases} x = v \cos \theta t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v \sin \theta t \end{cases}$$

ここで、 $y = 0$ のときに $x = L$ なので、

$$t = \frac{2v \sin \theta}{g} \quad L = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

したがって、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4H}{L}$$

- 2 分裂直前の A, B の速さは、初速の水平方向成分と同じなので $\frac{v}{\sqrt{2}}$

ここで、運動量保存則から、分裂直後の B の速さ u は、

$$m \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{m}{2} \frac{v}{2} + \frac{m}{2} u \quad u = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)v$$

したがって、上がる時間と落下時間は等しいので、求める距離は、

$$ut = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}vt$$

なお、本問の答えとしてはここでよいが、重力加速度 g を使うと、 t を消去することもできる。

分裂したときの高さ h は、力学的エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 = mgh \quad h = \frac{v^2}{4g}$$

したがって、落下するまでの時間は、

$$\frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{4g} \quad t = \frac{v}{\sqrt{2}g}$$

これより、求める水平距離は、

$$ut = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{v^2}{g} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4} \frac{v^2}{g}$$

いずれも等加速度運動の問題で、2は運動量保存則も出てきます。

1は放物線の有名な性質を示したものです。本問の結果から、斜めに打ち上げたとき、もし重力がなければ小球はまっすぐ打ち上がりますが、そのときの高さは、B点の水平距離を通るとき、つまり放物線の頂点からちょうど高さ H の位置を通ることになります。なお、正しいエネルギー保存では、水平方向の速度も必要であることに注意してください（今回は両辺に同じように入るので省略しただけです）。

2は運動量保存則がメインの問題です。水平方向速度成分を求めることが大切です。