1．ある物質は状態 X_1，X_2 の 2 通りのみをとり，一定時間ごとに一定確率で状態変化が起こるものとする。一定時間後に状態 X_i から X_j に変化する確率を（i，j）成分とする行列 P は，

$$P=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

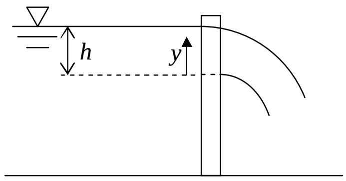
で与えられる。初期状態ではすべて状態 X_1 であったとする。このとき，時間の経過と共に物質が状態 X_1 である確率はどの値に収束するか。

2．図のように，流れの方向に直角に設けられた堰によってせき上げられた越流水深 h を計測することによって，流量 Q を求めることができる。つまり，せきの幅を $Q(y)$，重力加速度を g とすると，Q と h の間には，

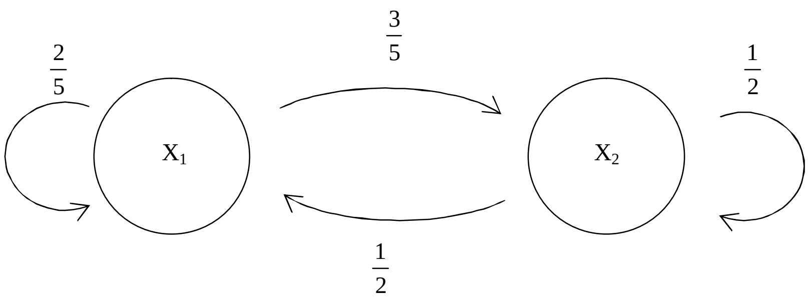
$$Q=C\int_0^h b(y)\sqrt{2g(h-y)}\,dy$$

の関係がある。ただし，C は正の定数である。

Q と h^2 が比例するとき，$b(y)=ay^n$ とするときの n の値を求めよ。



1　与えられた行列から状態遷移図を書き直す。



収束して割合が変わらなくなったのであれば，移動する量が等しくなるはずである。求める確率を p とすると，X_2 の状態となる確率は $1-p$ なので，

$$\frac{3}{5}p=\frac{1}{2}(1-p)\qquad\therefore\quad \underline{p=\frac{5}{11}}$$

2　関数を代入して，さらに $h-y=z$ と変数変換すると，

$$Q=C\int_0^h a(h-z)^n\sqrt{2gz}\,dz$$

これが h^2 に比例するなら被積分関数は z について 1 次になると考えられる。つまり，$n=\dfrac{1}{2}$ と考えられる。これを確かめてみよう。余計な係数は無視して，

$$F(h)=\int_0^h \sqrt{z(h-z)}dz$$

とする。ここで，$\sqrt{z(h-z)}=t$ とおくと，

$$t^2+(z-\frac{h}{2})^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

となる。これは z-t 平面で半径 $\frac{h}{2}$ の円となる。上の積分はこの円の z 軸より上側の部分の面積，つまり半円の面積となるので，

$$F(h)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{\pi h^2}{8}$$

（別解）

与えられた積分について，$y=hz$ の変数変換をすると，

$$Q=C\int_0^h b(y)\sqrt{2g(h-y)}dy=Ca\int_0^1 (hz)^n\sqrt{2g(h-hz)}hdz=\sqrt{2g}Cah^{n+\frac{3}{2}}\int_0^1 z^n\sqrt{1-z}dz$$

となる。ここで積分部分は定数であるため，求める n は，$n=\frac{1}{2}$

---

1 は有名問題で，何度も形を変えて出題されています。連立漸化式をたてる解法が有名なのですが，収束値を求める問題は収束した状況を前提に考えるというのがセオリーです。このタイプでは，どのような形式で出題されても，まずは落ち着いて状態遷移図を書くことが大切です。

2 は積分の問題です。n の値は簡単に推測できるでしょうが，肝心の積分ができなくて困ってしまったかもしれません。実際には選択肢がありましたので（$n=1$，2 など），一つ一つ試してみるのも手でしょう。やや難しい問題と言えます。なお，別解の最後に出てきた積分はベータ関数と呼ばれるものの一種で，n が自然数ならば，

$$B(n+1,\frac{3}{2})=\int_0^1 t^n(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2^{n+1}n!}{(2n+3)!!}$$

となります（正解の場合には，n が自然数ではありませんのでこの形にはなっていません）。なお $(2n+3)!!$ は，$1\times 3\times\cdots\times(2n+3)$ です。