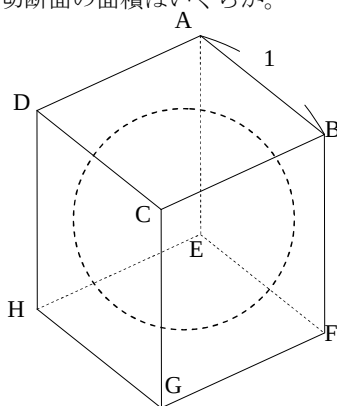


1. xy 平面上に直線 $y = 2x$ がある。いま、この xy 平面上の任意の点 $P(\alpha, \beta)$ から直線 $y = 2x$ に垂線を引き、その引いた垂線の足を $Q(\alpha', \beta')$ とするとき、点 P を点 Q に移す変換は 1 次変換であり、行列を用いた式

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

で表される。行列の成分 c はいくらか。

2. 図のように、一辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ と立方体すべての面に接する球がある。点 B, D, G を通る平面で立方体と球を切断するとき、球の切断面の面積はいくらか。



- 1 c を求めるためには、 $(1, 0)$ の行き先を考えればよい。つまり、 $(1, 0)$ から直線 $y = 2x$ に下ろした垂線の足 L を求めればよい（実際には y 座標だけでよい）。

そこで、 $(1, 0)$ を通り、 $y = 2x$ に垂直な直線の式を求めると、

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

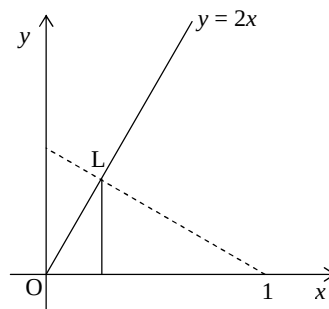
これと $y = 2x$ の交点が求める L で、

$$2x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{2}{5}$$

ここで、 $(1, 0)$ の行き先を考えると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

となるので、 $c = \frac{2}{5}$



- 2 求める円は、 $\triangle BDG$ の内接円である。 $\triangle BDG$ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形であるので、面積 S は、

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

内接円の半径を r とすると、面積について、

$$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad r = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

これより、求める面積は $\pi r^2 = \frac{\pi}{6}$

1 は久々の 1 次変換の問題です。行列自体は最近も時々出題がありましたが、その中でも易しい問題に入ると思います（国家Ⅱ種で毎年のように出題されていた時期がありますが、その頃の国家Ⅱ種に出されても易しい問題です）。ただ、1 次変換自体を知らない人が多いでしょうから、その点で逃げた人がいたのではないかと思います。解答ですが、もちろん、行列の係数を決定する簡単な方法が (1, 0) と (0, 1) の行き先であることを知っているから、最初から (1, 0) の行き先を考えているわけです。ここを (a, b) としてももちろんよいのですが、計算量は増えます。さて、この問題を取り上げたのは、別解が様々にあるからです。その分、よい勉強になるからですね。まず、同じように (1, 0) の行き先を考えるものとして、図形的に y 座標を求める方法もあります。A (1, 0) において、△OAL について考えると、OA=1 であり、△OAL も相似の関係から、1:2:√5 の三角形ですので、 $OL = \frac{1}{\sqrt{5}}$ です。したがって、L の y 座標は、同じく三角形の辺の長さの比から、 $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ となります。この方針では、他にも三角形の面積を考えたり、様々あるでしょう。

しかし、いずれも「結果的に」求まっただけの感じがします。つまり、なぜこれで全ての点で「垂線の足」になるのかがわかりません。(a, b) とおいたところで、それで任意の点で正しいことはわかっても、単に計算した結果そうなった、というだけの話です。もっと 1 次変換らしい解法も用意しましょう。1 次変換の行き先は、実は 2 つの 1 次独立なベクトルの行き先で決まります（逆変換がある場合）。ここでは垂線の足を求めればよい、ということですね。そこで、任意の点を、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置いてみましょう。つまり、(1, 2) は $y = 2x$ に沿う方向、(-2, 1) は、 $y = 2x$ に垂直な方向です。垂線の足を求めるとは、こう書いたときに、 $b = 0$ を代入するということです。

言い換えると、(1, 2) は固有値 1 の固有ベクトル、(-2, 1) は固有値 0 の固有ベクトルです。

したがって、求める行列 A は次のように書くことができます。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

これは、線形代数で習う対角化ですね。以下計算していくと、次のようになります。

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(0, 1) の行く先が、(1, 0) の行く先の座標の 2 倍になることは、解答の図からはすぐに確かめられますので、これは正解ですね。

2 はすいません・・・切る面勘違いしていました(╯▽╰)。この問題だと易しくて全く面白くないですね。解答の他に、円の中心が正三角形の重心に一致することから、直ちに半径を求める方法もありますが、まあ、どちらでもいいです。全く、もう少し工夫してもらいたいところです。勉強した人が得をするようにね。