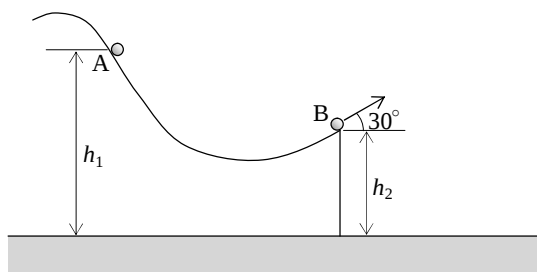


1. 曲線 $y = \ln x$, x 軸, y 軸及び直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積はいくらか。

2. 図のようななめらかな斜面に、水平な地面からの高さ h_1 の地点 A から滑り出した小球が、高さ h_2 の地点 B から斜め上向きに 30° の角度で飛び出した。飛び出した後に小球が達しうる地面からの最高の高さとして最も妥当なのはどれか。

ただし、 $h_1 > h_2$ とする。

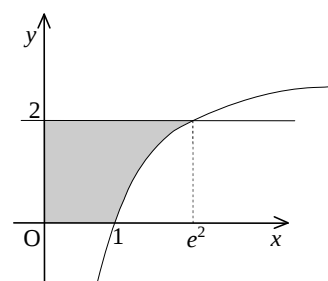


1 求める領域は右図の色の付いている部分である。したがって、求める面積 S は、

$$S = 2e - \int_1^{e^2} \log x dx$$

ここで部分積分の公式を使うと、

$$S = 2e^2 - \left\{ [x \log x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx \right\} = 2e^2 - \{ 2e^2 - (e^2 - 1) \} = e^2 - 1$$



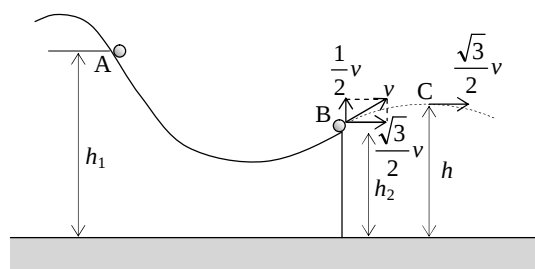
2 最高点を C として、その高さを h とする。

また、B における速さを v とする。また質量を m とする。

A→B における力学的エネルギー保存則より、

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mg(h_1 - h_2)$$



次に、A→C の力学的エネルギー保存則より、

$$mgh_1 = mgh + \frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{3}v}{2}\right)^2 \quad \therefore h = h_1 - \frac{3v^2}{8g} = h_1 - \frac{3h_1 - 3h_2}{4} = \frac{h_1 + 3h_2}{4}$$

1 は対数関数の積分の計算問題です。 $\int \log x dx = x \log x - x + C$ を覚えていれば簡単になりますが、そうでない場合には、部分積分をすることになります。

2 は、力学的エネルギー保存則の問題です。全体として力学的エネルギー保存則を使うことに気づくことが大切です（エネルギーが保存されることが前提ですが、なぜ力学的エネルギー保存則なのか考えてみてください）。B→C は等加速度運動の公式を使っても計算することができますが、計算量はやや多くなります。なお、ミスとしては、最高点 C での速さを忘れることも考えられます。引っかけ問題として覚えておくといよいでしょう。このタイプの問題は、数多く出題されています。