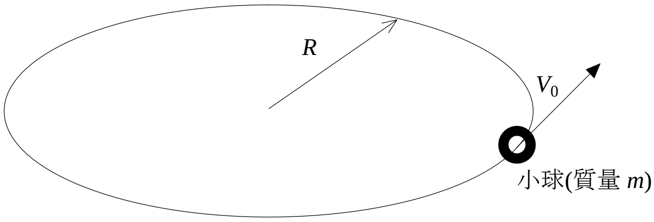
今週の工学の基礎　2011 年第 3 回

１．3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ が極値をもつための必要十分条件を求めよ。

２．水平面上に半径 R の金属製の輪があり，その中に，質量 m の穴の空いた小球が通っている。この質量 m の小球に，円周方向に初速 V_0 を与える。小球と輪の間の摩擦係数をμとする。

(1)　小球が静止するまでの時間 T_1 を求めよ。

(2)　小球が 1 周するまでにかかる時間 T_2 を求めよ。ただし，V_0 は十分に大きいとする。



1

$f'(x) = 3x^2 + 6ax + b$

ここで，$f(x)$が極値を持つということは，$f'(x)$の符号が変化する，ということである。$f'(x)$は下に凸の放物線であるため，符号が変化するためには，方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解を持たないといけない。そこで，この方程式の判別式を D とすると，

$D/4 = (3a)^2 - 3b = 3(3a^2 - b) > 0$

∴　$b < 3a^2$

２(1)

小球の速度を V とする。小球に加わる遠心力は $m\dfrac{V^2}{R}$ となるが，これはもともと小球と輪の間にはたらく垂直抗力である。したがって，小球に働く摩擦力は $\mu m\dfrac{V^2}{R}$ となる。これより，小球の回転に関する運動方程式は，次のようになる。ただし，角速度をωとする。

$$mR^2\frac{d\omega}{dt} = -\mu m\frac{V^2}{R}\times R = -\mu mR^2\omega^2$$

変数分離をすると，

$$dt = -\frac{d\omega}{\mu\omega^2}$$

両辺を積分すると，

$$\int_0^{T_1} dt = \int_{V_0/R}^{0}\frac{-d\omega}{\mu\omega^2}$$

∴　$T_1 = \infty$

(2)　(1)の途中の式より，

$$\int_0^t dt = t = \int_{V_0/R}^{\omega}\frac{-d\omega}{\mu\omega^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{R}{V_0}\right)$$

これより，

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\mu t + \dfrac{R}{V_0}} = \frac{\dfrac{1}{\mu}}{t + \dfrac{R}{\mu V_0}}$$

$$\therefore \quad d\theta = \frac{\dfrac{1}{\mu}}{t + \dfrac{R}{\mu V_0}} dt$$

これを積分して，

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = \int_0^{T_2} \frac{\dfrac{1}{\mu}}{t + \dfrac{R}{\mu V_0}} dt = \frac{1}{\mu}\left[\log(t + \frac{R}{\mu V_0})\right]_0^{T_2} = \frac{1}{\mu}\log\frac{\mu T_2 V_0 + R}{R}$$

これより，

$$\log\frac{\mu T_2 V_0 + R}{R} = 2\pi\mu$$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{R}{\mu V_0}(e^{2\pi\mu} - 1)$$

1．労基 B の過去問です。極値を持つということは，増加の状態から減少の状態へ，あるいは，減少の状態から増加の状態へと変化することです。単に $f'(x) = 0$ となるだけでは不十分です (増加の状態から，0 となる点を通って，再び増加になる場合があります。たとえば，$f(x) = x^3$ がそうですね)。そのため，重解となる場合が省かれていることに注意して下さい。ただし，実際の過去問では，等号が入る選択肢はありませんでしたが。

2．えっと･･･。これも実は出典のある問題なのですが･･･(1)が無限大になるとは思っていませんでした（積分できることだけ確認していました)。申し訳ありません。運動方程式が微分方程式になる典型的な問題で，解き方も決まっています。ただ，積分計算がかなり面倒ですね。なお，ここでは，回転の運動方程式を利用しましたが，平面極座標における周方向の運動方程式

$$m\frac{dV_\theta}{dt} = F_\theta$$

を使っても同じです。というより，普通はそちらを使いますね･･･。