

1. 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-x^2} dx$ を計算せよ。

2. 表面の粗い板があり、その上にブロックを載せる。板を徐々に傾けていったところ、ある角度でブロックが滑り出したため、そのままにしておいた。このとき、滑り出してからブロックが 2 秒間で進む距離を求めよ。ただし、板とブロックの間の静止摩擦係数を 0.75、動摩擦係数を 0.5 とし、重力加速度を 10m/s^2 とする。

1.

まず,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} - 1\right) = \frac{8-3\sqrt{3}}{24}$$

次に、 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ については、次のような円の面積として計算すると、

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{12} \times \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{8-3\sqrt{3}}{24} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{12}$$

(置換積分を使う)

$x = \sin \theta$ とおくと、 $dx = \cos \theta d\theta$ なので、

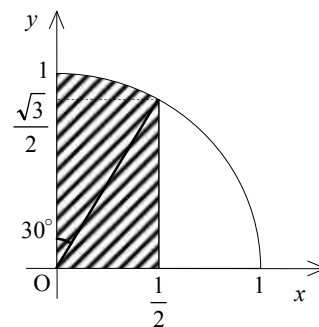
$$\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin \theta + 1) \cos^2 \theta d\theta$$

ここで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} = \frac{8-3\sqrt{3}}{24}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

となるので、求める積分は、上の解答通りとなる。



2.

質量を m とおく。力は右図のようになる。

滑り出すときには、 $R = 0.75N$ で、力が釣り合うため、

$$mg \cos \theta = N, \quad mg \sin \theta = 0.75N$$

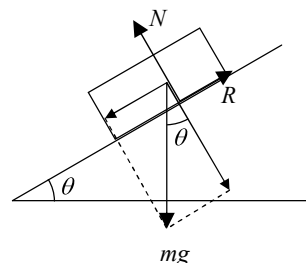
$$\therefore \tan \theta = 0.75$$

つぎに、動いているときに斜面方向の運動方程式をたてる。加速度を a とおくと、 $R = 0.5N$ なので、

$$ma = mg \sin \theta - 0.5 mg \cos \theta$$

ここで、 $\tan \theta = 0.75$ ということは、 $\sin \theta = 0.6$ 、 $\cos \theta = 0.8$ なので (3 : 4 : 5 の直角三角形),

$$a = 0.6g - 0.4g = 0.2g = 2 \text{ m/s}^2$$



したがって、等加速度運動の公式より、

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 4 \text{ m}$$

1.

やや難しい定積分の計算です。2 つに分けて計算しないと難しいと思います。ただ、それぞれの計算は押さえて置いてもらいたいところです。

2.

もともとは国家 II 種機械職の古い過去問です。2 秒後、ということですので、時間がらみの問題、ということで運動方程式を考えることになります。なお、本問のように滑り出すときの角度 θ は、静止摩擦係数を μ として、 $\tan \theta = \mu$ となります。