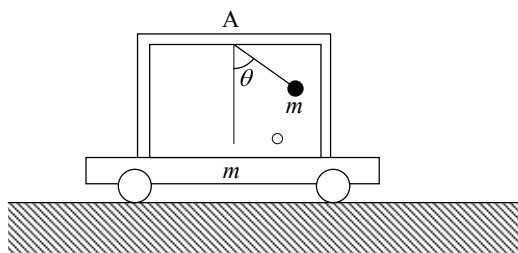


1. 1 辺の長さが 1 の正四面体 A がある。この A の 4 つの面の重心を頂点とする正四面体を B とする。正四面体 A の体積は、正四面体 B の体積の何倍か。

2. 水平方向に自由に動く台車（質量  $m$ ）があり、その重心は点 A を通る鉛直線上のどこかにある。この点 A に、質量  $m$  の質点が、質量のない長さ  $l$  の糸で吊されている。最初、台車は静止しており、質点は鉛直方向となす角  $\theta$  ( $\leq \pi/2$ ) で緩みのないように支えられている。重力加速度を  $g$  とし、各種の摩擦はいずれも無視できる。以下の問いに答えよ。

- (1) 質点が反対側の最上点に達するまでに、台車が水平方向に移動する距離を求めよ。
- (2) 質点が最下点にきたときのひもの張力を求めよ。



1 まず簡単な図を描いてみることでですね。そして、立体の問題も、まずは平面に直すことが大切です。具体的には、適切な切断面を考えることになります。その上でも、教養の切断の問題は重要になってきますね。

辺の長さの比が求まれば、体積比は相似比の 3 乗である。

右図の面 BCD で四面体を切断する。

このとき、各面の重心を通っていることから、

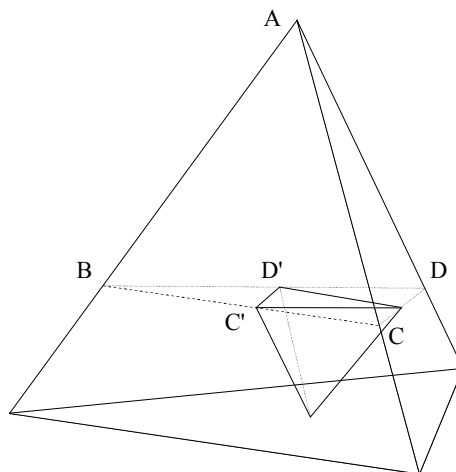
$$BC = CD = DB = \frac{2}{3}$$

である。したがって、中点連結定理から、

$$C'D' = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{3}$$

したがって、相似比が 3 : 1 なので、体積比は 27 : 1

つまり、27 倍である。



2. 重心の保存についての問題です。最近では剛体の回転について似たような問題が出題されていますね。

(1) 水平方向の外力がないため、重心の位置は保存される。そこで、A を通る鉛直線を原点位置として、水平右方向に  $x$  軸をとると、重心の座標は、

$$x_G = \frac{m \times l \sin \theta}{m + m} = \frac{l \sin \theta}{2}$$

台車の移動距離を  $L$  とすると、おもりは重心から左に  $l \sin \theta$  だけ振れているので、

$$x_G = \frac{mL + m(L - l \sin \theta)}{m + m} = L - \frac{l \sin \theta}{2} = \frac{l \sin \theta}{2}$$

$$\therefore L = l \sin \theta$$

(なお、この結果は重心の位置が変わらないこと、最上点ではおもりの位置が逆になるだけ、ということから図を描くと簡単に求めることもできる)

(2) 最下点にきたときの速さを求める。運動量保存則より、最下点では、台車とおもりの速さは同じく  $v$  とおける (方向は逆) ので、力学的エネルギー保存則より、

$$mgl(1 - \cos \theta) = 2 \times \frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore v = \sqrt{gl(1 - \cos \theta)}$$

最下点での相対速度は  $2v$  なので、遠心力は  $m \frac{(2v)^2}{l} = 4mg(1 - \cos \theta)$

これに重力を加えた分が糸の張力なので、 $T = mg(5 - 4 \cos \theta)$