

- さいころを3個同時に振った時、最大の目が5、最小の目が2となる確率はいくらか。
- 箱の中に同じ大きさの7個の玉があり、その内訳は赤玉、白玉、黄玉が各2個ずつ、黒玉が1個である。この中から玉を1個ずつ取り出して左から順に横一列に7個並べるとき、色の配置が左右対称となる確率はいくらか。
- 3本の当たりくじを含む12本のくじがある。これをA～Dの4人が順番に1本ずつ、A, B, C, D, A, B, …とそれぞれ合計3本引いていく。3つの当たり全てをDが引く確率はいくらか。
- 3個のさいころを同時に振る時、その和が12となる確率はいくらか。

- さいころ2つならば、全部の場合が36通りしかありませんし、表に書いてしまうのが速い、と考えるでしょう。しかし、さいころ3つとなると…と思うかもしれません。しかし、実は、さいころ3つの場合も表に書くことができるのです。なお、さいころを3つ同時に、となっていますが、3つのさいころは区別しておくことが大切です。1つ1つのさいころそれぞれがランダムに振られることが前提だからです。

さいころの問題は、あまり規則性がないため、計算よりは数える、という問題が多くなると思われます。確率の問題はどうしても計算優先になりがちですが、数える方法についても事前に準備しておくといいでしょう。これが下の(解1)となります。その場でどう思いついたか、ではなく、「事前に準備しておく」ことが大切です。つまり、さいころ3つの問題では、このような解き方があることを、憶えておくのです。簡単なのに盲点になりやすいですね。一方、(解2)は計算主体の方法です。今回は、最大と最小の両方が決められているため、どこかで場合分けが必要となるでしょう。あまり簡単な方法はありません。場合分けの方法は数多くありますが、単純に「1, 2回目がどうなるか」で分けてみました。

(解1)

さいころを3つ順番に投げたとしても、確率はかわらない。そこで、1回目を横に、2回目を縦に表にまとめ、題意に合うような3回目の結果を表の中に書いていくと、次のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1						
2		5	5	5	2～5	
3		5			2	
4		5			2	
5		2～5	2	2	2	
6						

以上から、最大が5、最小が2になる場合の数は、18通りであり、全ての場合が $6^3 = 216$ 通りであるので、求める確率は、

$$\frac{18}{216} = \frac{1}{12}$$

(例2)

1回目、2回目に何が出たのかで場合分けをする。どちらかで、必ず2か5のいずれかが出ているはずである。

①1回目、2回目に2, 5が出ている場合

そうなる確率は、どちらが1回目かで考えて $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ である。この場合は、残りの1回は2～5のいずれでもよい

ので、 $\frac{1}{18} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{27}$ となる。

②1 回目、2 回目のいずれか、または両方に 2 が出ていて、残りが 3、4 の場合

(1 回目、2 回目) = (2, 2)(2, 3)(2, 4)(3, 2)(4, 2) の 5 通りある。この場合、3 回目は 5 しかないので、

$$\frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

③1 回目、2 回目のいずれか、または両方に 5 が出ていて、残りが 3、4 の場合

この場合も②と同じである。

以上から、求める確率は、 $\frac{1}{27} + 2 \times \frac{5}{216} = \frac{1}{12}$

(補足)「最大値が 5」だけであれば、次のように考えるのが無難です。つまり、

「最大値が 5」= 「1~5 の目だけが出る」- 「1~4 の目だけが出る」

と考えると、 $\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$ となります。ただし、「最小値が 2」も合わせて考える、となると、この方法ではうまくいきませんね。

2. 場合の数で考えるのか、積の法則で考えるのかで見かけ上解法は分かります。ただ、どちらにしても、右側の 3 個は、左の 3 個の配置が決まれば対称的に決まってしまう、ということに注意が必要です。と、同時に中央は黒に画定します。つまり、最初の 4 個が「白、赤、黄、黒」となったら、残りの 3 つは「黄、赤、白」に確定してしまいます。ここがポイントですね。

(解 1) 場合の数を計算する

全部の並べ方は、7 個の中に 2 個ずつ同じものがあるので、

$$\frac{7!}{2!2!2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 630 \text{ 通り}$$

である。これが同様に確からしい。

次に、対称的な場合を考える。中央は黒でなければならない。そこで、左側に「黄、赤、白」を並べる場合の数を考えればよいので、

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

となる。

これより、求める確率は、

$$\frac{6}{630} = \frac{1}{105}$$

(解 2) 積の法則を使う

左から順番に、

(①: 黄、赤、白のいずれか) × (②: 黄、赤、白で出ていない色) × (③: 黄、赤、白でまだ出ていない色) × (④: 黒) × (⑤: ③と同じ色) × (⑥: ②と同じ色) × (⑦: ①と同じ色)

と出なければいけないので、

$$\frac{6}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{105}$$

3. 公務員試験で割とよく出題されるテーマで、「くじは引く順序に関係なく、あたる確率は同じ」になります。これを知っているかどうかだけが本問の最大のポイントです。これはよく憶えておいてください。

(解)

くじ引きの確率は当たる順序によらないので、Dが3つとも当たりを引く確率は、最初にA、B、Cが当たりを引いてしまう確率と同じである。したがって、

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

(補足)

くじ引きの当たりの確率が、引く順番に関係ないことの証明をしていることになってしましますが、場合の数で考えることも出来ます。

まず、全部の場合の数は、12回引く中で、どの3回が当たりになるのかを選ぶ場合の数なので、 ${}_{12}C_3=220$ 通りですが、このうち、4, 8, 12回目が当たりになるのは1通りしかないので、 $\frac{1}{220}$ となります。

4. 3個のさいころの問題ですから、1と同じように表を書いていくことができます。(解2)は最後を計算で解いていますが、さいころで計算は簡単ではない、と考えた方がよいでしょう。

(解1)

1と同じように表を書くと、次のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1					6	5
2				6	5	4
3			6	5	4	3
4		6	5	4	3	2
5	6	5	4	3	2	1
6	5	4	3	2	1	

したがって、求める確率は $\frac{25}{216}$

(解2)

さいころを2個投げて、その和が6, 7, 8, 9, 10, 11のいずれかになる確率は、 $\frac{5+6+5+4+3+2}{36} = \frac{25}{36}$ である。そ

して、この場合、3つ目を投げて和が12となる目が1つだけあるので、 $\frac{25}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$