

- 1 赤玉 2 個，青玉 3 個，白玉 5 個の計 10 個の同じ大きさの玉が入っている袋の中から，無作為に 4 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した 4 個の玉の中に，赤玉及び青玉がそれぞれ 1 個以上含まれる確率を求めよ。
- 2 各面に 1～8 の数字を書いた正八面体 1 個と，1～6 の数字のある普通のサイコロ 1 個を同時に振るとき，両者で同じ数字の出る確率を求めよ。
- 3 A, B 2 つの箱があり，A の箱の中には赤球 6 個と白球 4 個，B の箱の中には赤球 3 個と白球 6 個がそれぞれ入っている。1 個のさいころを投げて，3 の倍数の目が出たときには A の箱から球を 1 個，それ以外の目が出たときは，B の箱から球を 1 個取り出す。いま，取り出した球が赤球であるとき，A の箱から取り出した球である確率を求めよ。ただし，箱の中は見えず，球の大きさは同じものとする。
- 4 あるスポーツ選手は，前の試合に勝った場合，次の試合に連続して勝つ確率は，0.7 であり，前の試合で負けていた場合，その次の試合に連続して負ける確率は 0.8 である。このスポーツ選手の生涯勝率はいくらか。

1 少しややこしい余事象の練習のつもりで出題しました。確率の場合，正面から計算する場合と，余事象の確率を 1 から引く場合があります。計算の簡単な方を選ぶことができます。この「～以上」は典型的な余事象の問題で，今回も，まともに計算すると（赤，青）＝（1，1）（1，2）（1，3）（1，4）（2，1）・・・とかなりの場合が出てきてしまいます。ただ，今回はその先にも一つ難関があります。「赤玉または青玉が 1 個以上含まれる確率」ならば，余事象は「すべて白玉」となるのですが，今回は，「赤玉及び青玉がそれぞれ 1 個以上」ですので，「赤玉はあるが青玉がない」「青玉はあるが赤玉はない」場合も余事象に含まれます。この点の注意が必要になります。なお，確率で計算する方法，場合の数で計算する方法がありますが，大差ありませんので，ここでは確率で計算していきます。

（解 1）

余事象を計算する。

(1) 全てが白玉の場合

4 つの玉を順に取り出して，すべて白玉が出たと考える。

$$\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{42}$$

(2) 白玉と青玉しか出なかった場合

(1)と同様に考える。ただし，全て白玉の場合を取り除く。

$$\frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}$$

(3) 白玉と赤玉しか出なかった場合

(1)と同様に考える。ただし，全て白玉の場合を取り除く。

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{42} = \frac{1}{7}$$

以上から，求める確率は，

$$1 - \frac{1}{42} - \frac{13}{42} - \frac{1}{7} = \frac{11}{21}$$

2. さいころに違いがあると言っても，所詮全部で $6 \times 8 = 48$ 通りですから，全て調べれば確実に答えが出てきます。しかし，もうちょっとうまく考えてもいいですね。特にポイントは無いのですが，考え方次第で，ちょっと難易度の変わる

問題です。

(解1) 正六面体さいころを先に投げたと考える

さいころを同時に投げてでも別々に投げてでも、確率は変わらない。そこで、先に正六面体さいころを投げたとする。すると、正六面体さいころで何が出ようと、同じ数字の面が、正八面体さいころには1つある。それが出ればよいので、求める確率は $\frac{1}{8}$

(解2) 正八面体さいころを先に投げたと考える

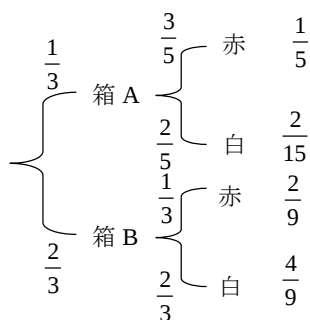
この場合、正八面体さいころの7, 8が出ると、同じ面が出ることはない。そこで、正八面体さいころを投げて、1~6が出て、さらに正六面体さいころで同じ面が出ればよいので、求める確率は、

$$\frac{6}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

3. いわゆる条件付きの確率です。「いま、取り出した球が赤球であるとき、Aの箱から取り出した球である確率を求めよ。」とありますが、このように「・・・のとき、・・・の確率を求めよ」や「・・・の条件の下で、・・・の確率を求めよ」となっているのが、条件付きの確率の典型的な問題文です。条件付きの確率はよく出題されるため、事前に準備しておくことが大切です。具体的には、全ての場合を図に表しておくといよいでしょう。準備しているから、このような図が書けるのですよ！

(解1)

起こる場合とその確率は以下の通りである。



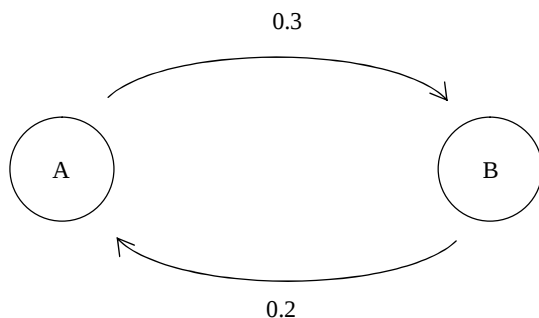
よって、求める確率は、赤が出たときに、それが箱 A から出た赤である確率なので、

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{9}} = \frac{9}{19}$$

4. いわゆる状態遷移図の問題です。漸化式を立てていくこともできますが、図を描いていく方が確実です。とはいえ、これも有名問題ですから、事前に解法を準備しておくことが大切でしょう。

(解1) 状態遷移図を描く

勝っている状態を A, 負けている状態を B とすると, 次のように状態遷移図が書ける。



最終的に勝っている確率を p とおくと, 負けている確率は $1 - p$ であり, 確率が収束するためには, $A \rightarrow B$ へ状態が移動する確率と, $B \rightarrow A$ と移動する確率は等しくなければならない。つまり,

$$0.3p = 0.2(1 - p)$$

$$\therefore p = 0.4$$

(解2) 漸化式をたてる

n 回目の後に勝っている確率を p_n とする。このとき, 次の漸化式を立てることができる。

$$p_{n+1} = 0.7p_n + 0.2(1 - p_n) = 0.5p_n + 0.2$$

回数を重ねれば, 結局トータルの勝率も p_n に近づいていく。収束すれば, $p_{n+1} = p_n$ なので, これを x とおくと,

$$x = 0.5x + 0.2 \quad \therefore x = 0.4$$

(補足)

勝っている確率を p_n , 負けている確率を q_n として, 連立漸化式を立てると, 次のようになります。

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0.7p_n + 0.2q_n \\ q_{n+1} = 0.3p_n + 0.8q_n \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

この行列は必ず固有値 1 をもち, その固有ベクトルを求めると, 固有ベクトルが, 求める確率になります。つまり,

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

となっていますね。確率行列の場合, 必ず固有値 1 があり, それは収束値に関係しています。