

[解答]

A の速さを v とすると、系の全エネルギーは、

$$E = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

楕円軌道を描く場合、距離が最大・最小となる場合には、楕円の法線の先に固定質点があるので（つまり、速度に垂直な方向に B がある = 速度ベクトルと、B からの位置ベクトルが垂直になる）、

$$L = mvr$$

ここから v を消去すると、

$$E = -G \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

これを r についての 2 次方程式と見て、解の公式を使って解くと、

$$r = -\frac{GMm}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

求めるのは、最小の方なので、

$$r = -\frac{GMm}{2E} - \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}} \quad \text{肢 1}$$

[ポイント]

万有引力の問題としては、割と有名な話だとは思いますが、結局は経験の有無が出るのでしょうか。最も、理工 III では、毎年のように万有引力の関連問題出るのでから、準備はしておくべきなのでしょう。一方理工 I や工学系の国家 II 種ではあまり出題はありませんが。ポイントは、角運動量の扱いになると思います。

なお、一見距離が負を取るように見えますが、楕円軌道の場合には、 E がマイナスになりますので、問題ありません（そうでないと、無限遠点で速度ベクトルが残ってしまう = 第 2 宇宙速度を超えてしまいますね）。