

[解答]

平衡位置では、ポテンシャルが極値をとるので、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a \left(\frac{1}{x^2} - \frac{b}{x^3} \right) = 0 \quad \therefore x_0 = b$$

そこで、 U を $x = b$ のまわりにテーラー展開した場合を考えてみる。つまり、

$$U(x) = U(b) + U'(b)(x-b) + \frac{U''(b)}{2}(x-b)^2 + \frac{U'''(b)}{6}(x-b)^3 + \dots$$

微小振動を考えるので、 $x - b$ は小さいため、 $(x - b)^3$ 以降の項は無視できるものとする。この場合、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -U''(b)(x-b) \quad (\because U'(b) = 0)$$

となる。これより、振動の角振動数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(b)}{m}} = \sqrt{\frac{a}{mb^3}} = \sqrt{\frac{a}{mx_0^3}} \rightarrow \text{肢 2}$$

[ポイント]

ポテンシャルを使った微小振動の典型的問題です。上の解答では、代入を後に回して、一般的な角振動数の公式を導いています。この形から $U''(b) > 0$ が振動を行うための条件であることがわかります。もちろん $U'(b) = 0$ (平衡点) ですから、結局、ポテンシャルが最小になる場合に、運動は安定的平衡点をとることがわかります。