第２章　熱伝導

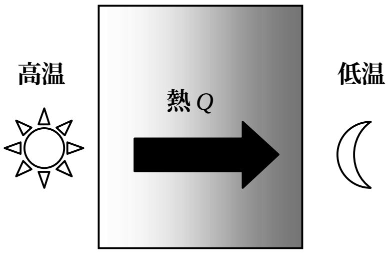
１．熱伝導の問題

○　熱伝導の問題とは，高温の部分から低温の部分に熱が流れていくときに，

(1)　流れる熱の量

(2)　流れている途中の温度

を求める問題である。このイメージを持っておいてもらいたい。

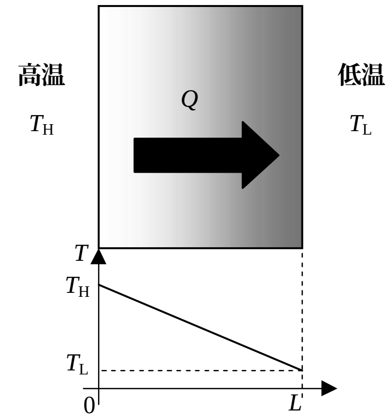


２．平板の熱伝導（熱発生なし）

　無限に広がる一様な平面（厚さ L，熱伝導率λ）の片方を高温 T_{H}，もう片方を低温 T_{L} に保ったとき，平面を単位時間に通過する単位面積当たりの熱量 q は，次の式で与えられる。

$$q = \lambda \frac{T_H - T_L}{L}$$

　このとき，平板内の温度は直線分布になる。



３．棒の熱伝導（熱回路）

　一様な棒（長さ L，断面積 S，熱伝導率λ）の片方の端を温度 T_{H}，他方の端を温度 $T_{\mathrm{L}}(<T_{\mathrm{H}})$に保ったとき，棒を伝わる熱量 Q は，次式で与えられる。

$$Q = \lambda S \frac{T_H - T_L}{L}$$

　複数の棒が接合される場合，接合点に入ってくる熱量の和は（入ってくる方を正ととっていることに注意）0 となる。

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

４．円筒の熱伝導

内径 R_i，外径 R_o の無限に長い円筒型の物体（熱伝導率λ）内側を高温 T_H，外側を低温 T_L に保つ場合，軸方向に単位長さの部分を考えて，熱伝導の式をたてると，次のようになる。

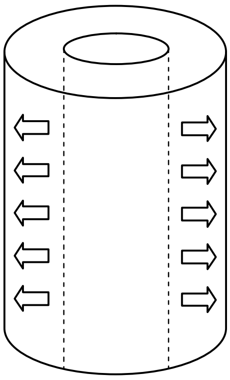
$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dr}$$

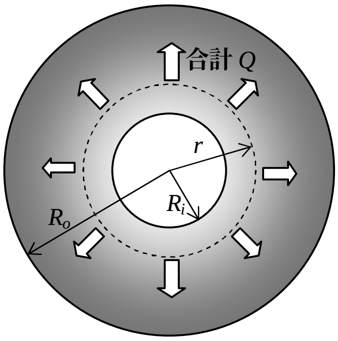
単位長さの円筒の場合，熱が放出される断面積は，円筒の側面積をとって $S = 2\pi r$ となるので，次のようになる。

$$Q = -2\pi \lambda r \frac{dT}{dr}$$

これを変数分離(r と T)して積分すると，熱量と温度分布は次のように求められる。

$$Q = \frac{2\pi\lambda (T_H - T_L)}{\ln R_o - \ln R_i}, \qquad \frac{T(r) - T_L}{T_H - T_L} = \frac{\ln R_o - \ln r}{\ln R_o - \ln R_i}$$





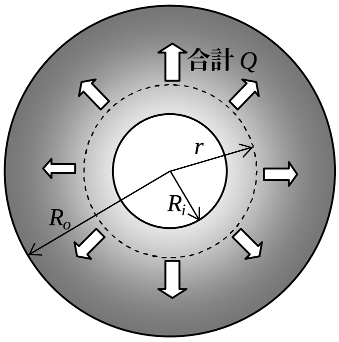
５．球の熱伝導

球の場合には，円筒の断面積の代わりに球の表面積 $S = 4\pi r^2$ を使えばよく，熱伝導の式は次のようになる。

$$Q = -4\pi \lambda r^2 \frac{dT}{dr}$$

これを解いて，伝わる熱量と温度分布を求めると次のようになる。

$$Q = \frac{4\pi\lambda R_o R_i}{R_o - R_i}(T_H - T_L), \qquad \frac{T(r) - T_L}{T_H - T_L} = \frac{R_o - r}{R_o - R_i} \cdot \frac{R_i}{r} = \frac{R_0 / r - 1}{R_o / R_i - 1}$$

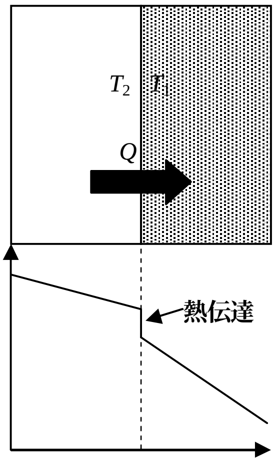


6．熱伝達を考慮する場合（発展）

温度が T_{H} の物体と T_{L} の物体を接触させると，その間に熱が伝わる。この単位面積当たりの熱量を q とすると，伝わる熱量は次のようになる。ただし，熱伝達率をαとおく。

$$q = \alpha(T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}})$$

接触面積がわかっている場合は，これをかければ伝わる全熱量 Q になる。



7．熱の発生がある場合（発展）

単位時間，単位面積当たりに熱量が w だけ発生することがわかっている場合，熱伝導の式を次のように変形する。

$$w = \frac{dq}{dx} = -\lambda \frac{d^2T}{dx^2}$$

あるいは，円筒の式の場合には，

$$wS = \frac{dQ}{dr} = -\lambda S \frac{d^2T}{dr^2}$$

もっとも，実際に通過熱量 Q が計算できる場合には，それを使って通常の熱伝導の式に代入してもよい。たとえば，半径 R の球の内部から一様に単位時間，単位面積当たり w の熱量が発生する場合，球の半径 r の位置を通過する熱量は，そこより内側で発生した熱量の総合計であるから， $w \times \frac{4}{3}\pi r^3$ となり，これを５の式に代入すれば，

$$\frac{4}{3}\pi r^3 w = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \qquad \therefore \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{w}{3\lambda} r$$

となるため，中心と表面の温度差ΔT は，これを積分して，

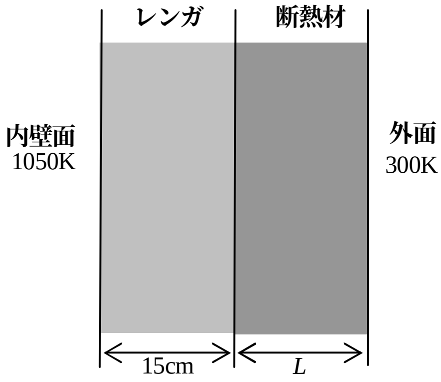
$$\Delta T = \frac{wR^2}{6\lambda}$$

とわかる。

本試験問題

【No.　1】　図のように，内壁面の温度 1050K，厚さ 15cm，熱伝導率 1.0W/(m・K)のレンガに，外面の温度 300K，熱伝導率 0.1W/(m・K)の断熱材をはり付けて，1m^{2}当たりの放熱量を 1000W 以下としたい。このとき必要な断熱材の厚さ L は最低いくらか。

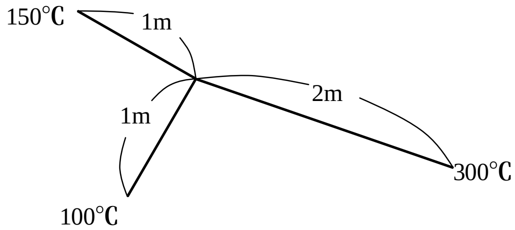
ただし，レンガと断熱材の間の接触熱抵抗は無視できるものとする。(H.17 国家 II 種)



1　5cm　　**2**　6cm　　**3**　7cm　　**4**　8cm　　**5**　9cm

【No.　2】　図のように，材質が同一で，断面積が等しい三つの金属棒からなる物体がある。各金属棒の端の温度が図に示す温度に保たれているとき，定常状態における接合部 A の温度として最も妥当なのはどれか。

ただし，熱は棒を通ってのみ流れ，棒の側面において熱の出入りはないものとする。(H.19)

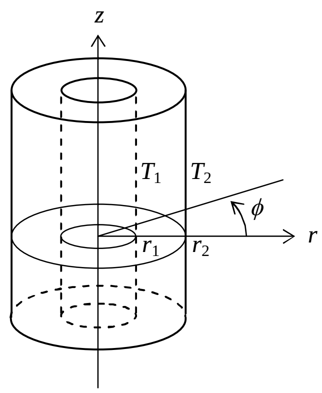


1　160℃　　**2**　170℃　　**3**　180℃　　**4**　190℃　　**5**　200℃

【No.　3】　図のような，内外の半径がそれぞれ r_1，r_2 で無限長さの厚肉円管がある。円管の内面，外面の温度はそれぞれ T_1，T_2（$T_1>T_2$）に保たれている。定常状態で，熱伝導率 λ が一定であり，かつ内部発熱が無い場合，温度 T が T_1 と T_2 の中間値 $\left(\dfrac{T_1+T_2}{2}\right)$ となる位置を表す半径として最も妥当なのはどれか。

なお，円管の温度分布は，円柱座標（r：半径，ϕ：角度，z：長さ）を用いれば，次の熱伝導の基礎式に従うものとする。ここで，ρ は密度，C_p は定圧比熱，t は時間，q_v は単位体積当たり単位時間に発生する熱量である。(H.15)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v$$



1　$\dfrac{r_1+r_2}{2}$　　**2**　$\sqrt{r_1 r_2}$

3　$\sqrt{\dfrac{r_1^2+r_2^2}{2}}$　　**4**　$\left\{1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)\right\}r_1$

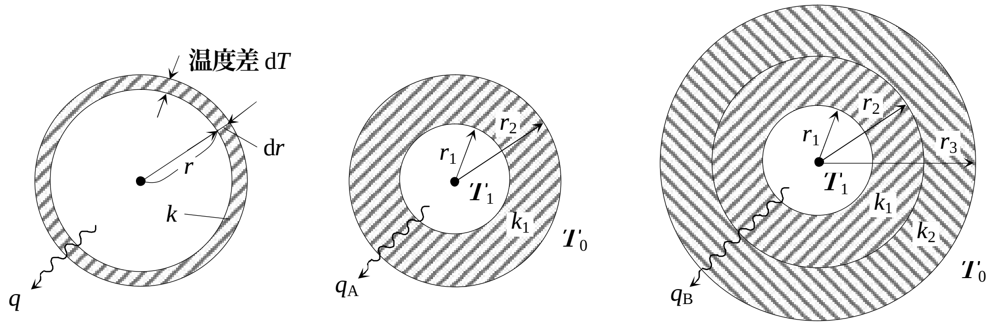
5　$\left\{1+\dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)\right\}r_1$

【No.　4】　図 I のような管において，単位時間，単位長さ当たりに放出する熱量 q は，管の半径方向を r，熱伝導率を k，半径方向の熱勾配を $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ として，

$$q = -2\pi r k \ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

で与えられる。

いま，図IIのように，内径 $2r_1$，外径 $2r_2$ の管 A（熱伝導率 k_1）と，図IIIのように，管 A を断熱材（熱伝導率 k_2）で覆い，外径を $2r_3$ にした管 B がある。管 A，B の内壁温度が T_1，外壁温度が T_0 に保たれているときの単位時間，単位長さ当たりに放出する熱量をそれぞれ q_A, q_B とする。このとき，管 A 及び管 B から放出する熱量の比 q_A/q_B として正しいのはどれか。(H.11)



管　図 I　　管 A　図II　　管 B　図III

1　$1+\dfrac{k_1}{k_2}\dfrac{r_1 r_3}{{r_2}^2}$　　**2**　$\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\dfrac{r_1 r_3}{{r_2}^2}$　　**3**　$\dfrac{k_1}{k_2}\left(1+\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{\ln(r_2/r_1)}\right)$

4　$\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\left(1+\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{\ln(r_2/r_1)}\right)$　　**5**　$1+\dfrac{k_1}{k_2}\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{\ln(r_2/r_1)}$

【No.　5】　無限に長い円管壁の内部を単位長さ，単位時間当たりに管の半径方向に通過する流量 q は，管の半径方向を r，熱伝導率を λ，半径方向の温度勾配を $\dfrac{dT}{dr}$ として，

$$q = -2\pi r\lambda \frac{dT}{dr}$$

で与えられる。

いま，外径 $2r_0$ の銅管を熱伝導率が λ_0 の保温材 A と $2\lambda_0$ の保温材 B で保温することを考える。保温材の厚さは r_0 で一定とすると，図 I のようにまず保温材 A で銅管をおおい次に保温材 B でさらにおおう場合に対し，図 II のように保温材 A, B の内外を入れ替えた場合には，単位時間当たりに銅管から流出する流量は何倍になるか。

ただし，銅管の外側の表面温度は T_0，外側の保温材の表面温度は T_1 で一定とする($T_0 > T_1$)。また，保温材と銅管，保温材 A，B 間の接触熱抵抗は無視してよい。(H.17)

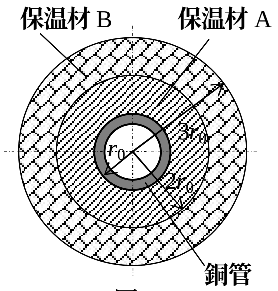


図 I

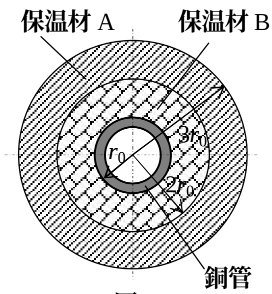


図 II

1　$\dfrac{\ln 18}{\ln 12}$　　**2**　$\dfrac{\ln 12}{\ln 18}$　　**3**　$\dfrac{\ln 6}{\ln \frac{9}{2}}$　　**4**　$\dfrac{\ln \frac{9}{2}}{\ln 6}$　　**5**　1

【No.　6】　図 I のような平面において，単位時間当たりに伝わる熱量 Q は次の式で表される。

$$Q = -Ak\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

ここで $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ は熱の流れる温度勾配，A は断面積，k は熱伝導率である。

今，図 II のような内半径 r_1，外半径 r_2 の円管において，

ア　内表面温度を t_h，外表面温度を t_l $(t_h > t_l)$に保ち十分時間がたった場合

イ　内表面温度を t_l，外表面温度を t_h に保ち十分時間がたった場合

の円管の半径方向の温度分布を表している図はどれか。(H.7 工学の基礎)

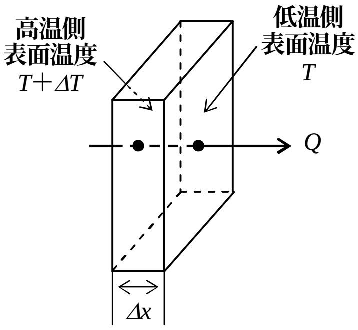


図 I

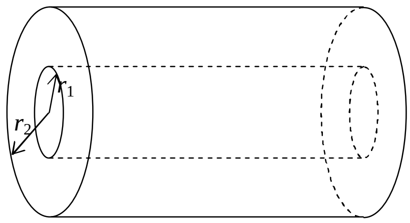
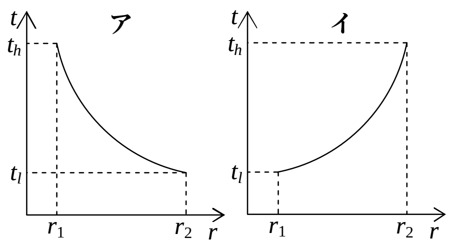
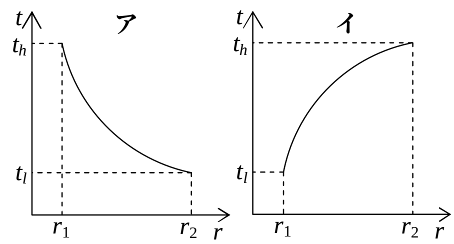


図 II

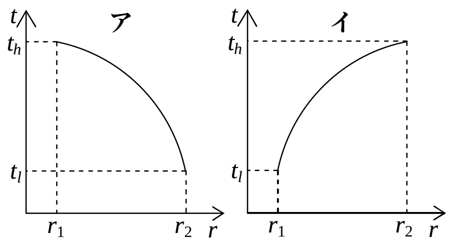
1



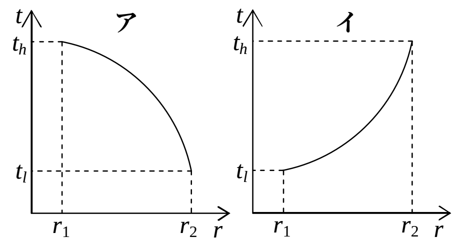
2



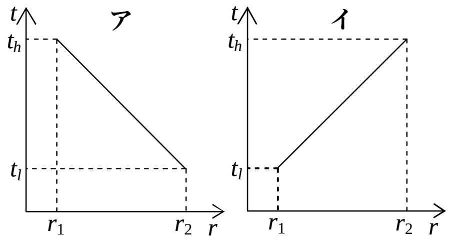
3



4



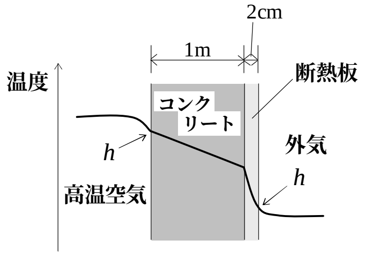
5



【No.　7】　高温空気と外気の間に十分大きな面積の厚さ 1m のコンクリート壁と，熱損失を少なくするための厚さ 2cm の断熱板がある。図はその温度分布の様子を示している。

いま，高温空気からの熱損失をさらに少なくするため，この断熱板を厚くすることを考える。高温空気から外気への熱流量を半分にするためには断熱板をどれだけ追加すればよいか。

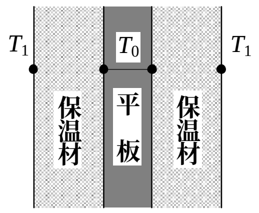
ただし，コンクリートの熱伝導率λ_1，断熱板の熱伝導率λ_2をそれぞれ 1W/(m・K)，0.01W/(m・K)，コンクリートと高温空気，断熱板と外気の間の熱伝達率はともに h = 2W/(m^2・K)とする。なお，コンクリート壁と断熱板の間の接触熱抵抗はないものとする。(H.13)



1　1cm　　**2**　2cm　　**3**　3cm　　**4**　4cm　　**5**　5cm

【No.　8】　有限な厚さをもつ無限に広い平板がある。この平板を一定温度 T_0 に保ちたい。そのため，図に示すように単位厚さの保温材で覆う。保温材の表面は温度 T_1（$T_1 < T_0$）に保たれている。また，保温材内部は通電加熱され，一様な発熱量 Q（単位時間，単位体積当り）を生じさせられるものとする。この系が定常な状態であるときの Q の値はいくらか。

ただし，保温材の熱伝導率λは一定で，平板と保温材の間の界面には熱抵抗がないものとする。(H.9)



1　0　　**2**　$\lambda(T_0 - T_1)$　　**3**　$2\lambda(T_0 - T_1)$　　**4**　$3\lambda(T_0 - T_1)$　　**5**　$4\lambda(T_0 - T_1)$