攻略問題集　追加問題集　数学第 1 章

【No.　1】(H.25 労基 B)　関連 例題 1 − 1

2^{125} を 10 進法表示したときの桁数と先頭の数字の組み合わせとして正しいのはどれか。

ただし，$\log_{10} 2 = 0.30103$ とする。

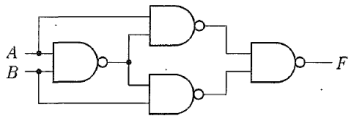
	桁数	先頭の数字		桁数	先頭の数字
1.	37 桁	3	2.	37 桁	4
3.	37 桁	5	4.	38 桁	4
5.	38 桁	5			

【No.　2】(H.16 労基 B 改題)　関連 例題 1 − 2

図のような NAND 回路を組み合わせた回路がある。入力 A，B に対する出力 F の論理式として妥当なのはどれか。

ただし，入力 X，Y に対する 2 入力の NAND 回路の出力 Z は以下の表で表される。

X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



1.　$A \cdot B$　　2.　$A + B$　　3.　$\overline{A} + \overline{B}$

4.　$A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$　　5.　$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

【No.　3】(H.22 労基 B)　関連 例題 1 − 4

行列 $A = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}$ について，A^6 として正しいのはどれか。

1.　$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$　　2.　$\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$　　3.　$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$

4.　$\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$　　5.　$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

【No. 4】(H.13 国家 II 種)

関連 例題 1 − 5

xy 平面上のある点を別の点に一次変換する操作を f で表す。f により点 (1，0) は点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に，点 (0，1) は点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に変換される。原点を O とし，点 P(3，1) の f により変換される点を P' とするとき，三角形 OPP' の面積はいくらか。

1. 2.5　2. 3.0　3. 3.5　4. 4.0　5. 4.5

【No. 5】(H.20 国家 II 種)

関連 問題 No.1

関数 $y = 2 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 31$ の最小値はいくらか。

1. -7　2. -1　3. 1　4. 7　5. 17

【No. 6】(H.17 国家 II 種農業土木職)

関連 問題 No.2

$3^{\log_9 x} = 2$ のとき，x はいくらか。

1. -4　2. -2　3. 2　4. 4　5. 6

【No. 7】(H.19 労基 B)

関連 問題 No.1-3

x, y に関する連立方程式

$$\begin{cases} x^3 = y^2 \\ x^y = y^x \end{cases} \quad (x > 0, y > 0, x \neq 1)$$

の解のうち，x の値はいくらか。

1. $\frac{9}{25}$　2. $\frac{4}{9}$　3. $\frac{16}{25}$　4. $\frac{25}{16}$　5. $\frac{9}{4}$

【No. 8】(H.12 国家 II 種農業土木職)

関連 問題 No.5

$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin 2x$ はいくらか。

1. $-\frac{3}{4}$　2. $-\frac{1}{4}$　3. 0　4. $\frac{1}{5}$　5. $\frac{1}{4}$

【No. 9】(H.19 国家 II 種農業土木職)

関連 問題 No.5

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき，$\sin(\alpha + \beta)$ はいくらか。
ただし，α は鋭角，β は鈍角とする。

1. $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　2. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　3. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　5. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

【No. 10】(H.26 東京都 IB 新方式教養)

次の行列 A，B の積 BA として，正しいのはどれか。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

1. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$　2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -9 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$　3. $\begin{bmatrix} -6 & -5 & 9 \\ 5 & 0 & 13 \\ -5 & -7 & 10 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ 5 & 0 & -7 \\ -5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$　5. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

関連 問題 No.7，東京都 IB 新方式の教養の教養基礎分野です

【No. 11】(H.26 国家総合職数学物理地球科学)

平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の各点 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，直線 $ax + by = 0((a, b) \neq (0, 0))$ に関し対称な点を $\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とする。このとき，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x'}$ を対応させる写像は，ある 2 次正方行列 A を用いて $\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる。この A として正しいのはどれか。

1. $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$　2. $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$

3. $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$　4. $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$

5. $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

関連 問題 No.10
この問題はやや難しめの問題です。少し難しく感じる場合には，$a = b = 1$ として解くとよいでしょう

【No. 12】(H.14 国家 II 種農業土木職)

$x = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$ であるとき，$\dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$ はいくらか。

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　2. $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$　3. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$　4. $2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$　5. $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

【No. 13】(H.16 国家 II 種農業土木職)

$x + y + z = 11$，$x^2 + y^2 + z^2 = 49$，$xyz = 36$ のとき，$\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z}$ はいくらか。

1. 1　2. 2　3. 4　4. 6　5. 8

【No. 14】(H.11 国家 II 種化学職)

ある連立方程式は行列を用いて，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(λ は実数) で表される。この方程式が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつときの実数 λ はいくらか。

1. -2　2. -1　3. 1　4. 2　5. 4

【No. 15】(H.23 労基 B)

数式 $f(x) = x^{2011} + ax^{23} + b$ が，$x^2 + 1$ で割り切れるような定数 a，b の値の組み合わせとして正しいのはどれか。

	a	b		a	b		a	b		a	b		a	b
1.	-1	0	2.	0	-1	3.	0	1	4.	1	0	5.	1	1

【No. 16】(H.25 国家総合職)

x^{25} を $(x+1)^2$ で割った余りとして正しいのはどれか。

1. $-50x - 25$　　2. $-50x + 25$　　3. $-25x - 24$
4. $-25x + 24$　　5. $25x + 24$

【No.1】　正解 4　難易度 C

常用対数をとって考える。

$$\log_{10} 2^{125} = 125 \log_{10} 2 = 125 \times 0.30103 = 37.628$$

したがって，

$$10^{37} < 2^{125} < 10^{38}$$

となるので，2^{125} は 28 桁である。

次に，先頭の数字を考える。ここで選択肢は 4 か 5 になっているので，この 2 つの見分けができればよい。つまり，

$$5 \times 10^{37} > 2^{125}$$

なら，先頭の数字は 4 になるはずである。ここで，

$$5 \times 10^{37} = \frac{10^{38}}{2}$$

であるので，この常用対数をとると，

$$\log_{10} \frac{10^{38}}{2} = \log_{10} 10^{38} - \log_{10} 2 = 38 - 0.30103 = 37.69807 > 37.628 = \log_{10} 2^{125}$$

これより，

$$5 \times 10^{37} > 2^{125}$$

となったので，先頭の数字は 4 である。

【No.2】　正解 5　難易度 A

左から順に NAND を調べていく。左の NAND の出力を x，上の出力を y，下の出力を y とおく。実際に調べると次の表のようになる。

A	B	x	y	z	F
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0

一方，選択肢の論理式をそれぞれ調べると次のようになる。

A	B	肢 1	肢 2	肢 3	肢 4	肢 5
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0

発展

論理式は，表のどこに「1」が付くのかを表しています。具体的には，A ならば，「$A = 1$ のところを「1」にする」という意味ですし，$\overline{A}$ ならば，「$A = 0$ のところを「1」にする」という意味になります。また，積は「かつ」，和は「または」を表します。実際には，和は「区切りの記号」とみるのがよいでしょう。たとえば，肢 4 ですが，$A \cdot B$ と $\overline{A} \cdot \overline{B}$ に分けてみます。$A \cdot B$ は，「A と B が両方 1 のところを 1 にする」という意味ですし，$\overline{A} \cdot \overline{B}$ は，「A と B が両方 0 のところを 1 にする」という意味になります。これが「+」でつながっていますので，結局，両方 0 のところと，両方 1 のところが 1 となります。表を見ると，そうなっていますね。

前半は対数の基本問題なので，解けるようにしておくとよいでしょう。後半は有名ですが，難しい問題です。労基では何度か出題があるため用意してもいいでしょうが，地上，一般職志望の場合には，飛ばしてもいいです

【No.3】　正解 2　難易度 A

行列計算の練習問題です。平方根が入っていますが，計算ミスに注意して計算しましょう

実際に計算をする。

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2 & -2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \\ 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) & (\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^4 = (A^2)^2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
A^4 \times A^2 = 2 \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}
$$

補足

公務員試験のこの手の行列の計算問題は，このように実際に計算したり類推するものばかりです。ですので，本解答のような方法がいいのですが，他にも方法があります。

たとえば，$|A| = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 2$ に気づけば，$|A^6| = |A|^6 = 64$ となりますが，これを満たすのは肢 2 しかありません。

なお，加法定理を使えば，

$$
A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}
$$

となります。つまり，A は $\sqrt{2}$ 倍拡大と，15° 回転を表す行列なのです。

【No.4】　正解 1　難易度 A

例題 1-5 とほぼ同じ問題です。詳細はそちらを参照してください

与えられた条件より，1 次変換 f を表す行列 A は，

$$
A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

となる。したがって，点 P' は，

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

したがって，求める面積は，$\triangle \mathrm{OPP}' = \dfrac{1}{2}|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 2.5$

三角形の面積の公式は P.36

【No.5】　正解 2　難易度 A

$2^x = t$ とおくと，$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ と，$2^{x+4} = 2^4 \cdot 2^x = 16t$ であることから，

$$y = 2t^2 - 16t + 31 = 2(t^2 - 8t) + 31 = 2(t-4)^2 - 1$$

となる。したがって最小値は -1 である。

【No.6】　正解 4　難易度 A

$\log_9 x = t$ とおくと，与えられた方程式は，

$$3^t = 2$$

底が 3 の対数をとると，

$$\log_3 3^t = t \log_3 3 = t = \log_3 2$$

したがって，

$$\log_9 x = \log_3 2$$

ここで，底の変換公式より，

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 \sqrt{x}$$

したがって，

$$\log_3 \sqrt{x} = \log_3 2$$

これより，

$$\sqrt{x} = 2 \qquad \therefore \quad x = 4$$

【No.7】　正解 5　難易度 B

2 つの式の対数をとると，次のようになる。

$$\begin{cases} 3\log x = 2\log y \\ y\log x = x\log y \end{cases}$$

$\log x \neq 0$ なので，辺ごと割り算すると，

$$\frac{3\log x}{y\log x} = \frac{2\log y}{x\log y} \qquad \therefore \quad y = \frac{3}{2}x$$

これを連立方程式の最初の式に代入して，

$$x^3 = \frac{9}{4}x^2 \qquad \therefore \quad x = \frac{9}{4}$$

【No.8】　正解 1　難易度 A

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

の両辺を 2 乗して，

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos c + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

ここで，倍角の公式より，

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

なんと言うことないように見えるかもしれませんが，最初で文字を置き換えたところは大切です。これで問題がだいぶ楽になります。このような工夫は大切です

となるので，

$$\sin 2x = -\frac{3}{4}$$

【No.9】　正解 2　難易度 A

α は鋭角なので，

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{2}$$

β は鈍角なので，

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

加法定理より，

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

【No.10】　正解 1　難易度 A

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

【No.11】　正解 5　難易度 C

直線 $ax+by=0$ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，方向ベクトルは $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ である。点を直線 $ax+by=0$ に関し対称の位置に移すということは，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $-\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ にうつす，ということである。つまり，

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

まとめると，

$$A\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次変換の行列は，2 点の行き先がわかれば計算できます。この「2 点さえわかればすべてわかる」が 1 次変換の最大の特徴なのです。なお，$a=b=1$ とする場合には，$(1,0)$，$(0,1)$ の 2 つの行き先を考えるのがよいでしょう

【No.12】　正解 2　難易度 B

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})} \\ &= \frac{(3+x)+2\sqrt{9-x^2}+(3-x)}{(3+x)-(3-x)} \\ &= \frac{3+\sqrt{9-x^2}}{x} \end{aligned}$$

ここに値を代入すると，

$$9 - x^2 = 9 - \frac{35}{4} = \frac{1}{4}$$

となるので，

$$(\text{与式}) = \frac{3 + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{35}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

【No.13】　正解 2　難易度 A

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz}$$

ここで，

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

となるので，

$$2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 72$$

したがって，

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{2(xy + yz + zx)}{xyz} = \frac{72}{36} = 2$$

【No.14】　正解 1　難易度 B

問題集 P.22 を参照してください

行列式が 0 になればよい。

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

ここで，$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ は実数解をもたないので，$\lambda = -2$

【No.15】　正解 1　難易度 B

この問題では，複素数の計算も使います。複素数については付章をご参照ください

$$f(x) = x^{2011} + ax^{23} + b = (x^2 + 1)Q(x)$$

とおく。

$$f(i) = i^{2008} i^3 + a i^{20} i^3 + b = -i - ai + b = 0$$

$i^4 = 1$ を使っています。なお，a, b が実数という前提なら $f(i) = 0$ のみで正解が出てきます

$$f(-i) = -i^{2008} i^3 - a i^{20} i^3 + b = i + ai + b = 0$$

2 つの式を加えて，$2b = 0$ つまり $b = 0$ であり，したがって，$a = -1$ となる。

【No.16】　正解 5　難易度 B

他にも $x + 1 = t$ とおく別解があります

$$x^2 5 = (x + 1)^2 Q(x) + ax + b$$

とおく。$x = -1$ を代入して，

$$-1 = -a + b$$

次に，最初の式を微分して，

$$25x^{24} = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$$

ここに $x = -1$ を代入して $a = 25$ となり，したがって，$b = 24$ となる。

この時点で選択肢からは 5 しかありません